

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PARIS VII

Spécialité :

Acoustique Physique

présentée par :

Arnaud Tourin

pour obtenir le grade Docteur de l'Université Paris VII

Diffusion multiple et renversement du temps des ondes ultrasonores

sous la direction de Mathias Fink

soutenue le 26 novembre 1999

devant le jury composé de :

Monsieur Claude Boccara

Monsieur Yves Couder

Monsieur Arnaud Derode

Monsieur Mathias Fink

Monsieur Georg Maret

Monsieur Roger Maynard

Monsieur John Scales

Monsieur Bart Van Tiggelen

Rapporteur

Rapporteur

A mes parents,
A ma sœur,
A Astrid,
A Carsten,

REMERCIEMENTS

Avant tout, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Mathias Fink pour m'avoir proposé ce sujet et m'avoir encadré durant ces trois années de thèse. Son remarquable sens physique et ses encouragements constants m'ont été d'un précieux secours.

Je remercie tout particulièrement Bart A. Van Tiggelen et Georg Maret d'avoir bien voulu consacrer du temps à relire mon manuscrit ; je sais particulièrement gré au Professeur Maret de s'être déplacé d'Allemagne pour la soutenance.

Je tiens à remercier vivement MM. les professeurs Boccara, Couder, Maynard et Scales de m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury.

Mes premiers pas dans le monde du « retournement temporel » ont été guidés par Arnaud Derode. Bien loin de n'être qu'un collègue efficace et dévoué, Arnaud est avant tout un ami sincère et compréhensif qui m'a beaucoup appris et pas seulement en physique.

J'adresse de profonds remerciements à François Wu si disponible et dont les conseils sont toujours utiles et à Didier Cassereau, « Monsieur Réseau à titre bénévole », mais surtout grand physicien devant l'éternel, sans lesquels le laboratoire ne tournerait pas.

Je remercie chaleureusement Daniel Royer d'avoir accepté un intrus dans le monde des acousticiens et M. Dieulesaint, Professeur émérite, un peu notre père à tous, qui a bien voulu me faire profiter de son expérience en acoustique, en... football et en tennis.

Je ne saurais oublier Christophe Barrière, à l'humour toujours aussi aiguisé ; Stefan « jazzy » Catheline, notre batteur fou ; Christian Dorme, notre « Bernard Hinault » ; Luc Forest, spécialiste ès « aérogels » ; Vincent Gibiat avec lequel j'aime à parler politique et qui m'a par ailleurs initié aux plaisirs des cigares ; Julien de la Gorgue de Rosny, baron au grand cœur, camarade de galère, expert ès *Matlab* et de tant d'autres choses encore, dont les conseils sont si fructueux ; Ros Kiri Ing, Monsieur « ondes de surface » ; Lina Jegam, notre secrétaire bien aimée dont le sourire en fait fondre plus d'un ; Estelle Kerbrat qui, lorsqu'elle ne contribue pas au repeuplement de la France, nous offre sa joie et sa bonne humeur ; Sebastien Manneville, notre « Bruno Peyron » ; Agnès Maurel, hydrodynamicienne de talent ; Claire Prada, notre brillante mathématicienne, qui apporte au laboratoire sa touche de rigueur ; l'inénarrable Philippe Roux représentant du LOA à « l'International Board » ; Laurent Sandrin, le seul vrai rival de Christophe en matière de blagues ; Mickael Tanter, alias le « péruvien », alias le « roi de la simul », alias « Austin Powers » ; Jean-Louis Thomas, dont la grande compétence et le sens critique sont précieux à tous ; Sylvain Yon, notre escaladeur patenté. Tous contribuent à faire de ce laboratoire un lieu où se côtoient sérieux et bonne humeur.

Je ne pourrais terminer sans évoquer la mémoire de Carsen Draeger qui nous a quitté si brutalement et nous manque à tous profondément.

TABLE DES MATIERES

Chapitre I : La diffusion multiple en acoustique / Onde balistique et onde cohérente

1. Présentation du formalisme	7
1.1. Formalisme de Green	7
1.1.1. Milieu homogène	7
1.1.2. Milieu hétérogène	9
1.2. Introduction de la matrice T	11
1.2.1. Espace réel	11
1.2.2. Espace des k	12
2. Diffusion par un obstacle	14
2.1. Section efficace de diffusion	14
2.2. Le théorème optique	17
3. Propagation de l'amplitude ultrasonore dans un milieu désordonné	20
3.1. Le monde réel : approximation de Born	20
3.2. Le monde probabiliste en amplitude	26
3.2.1. L'équation de Dyson	26
3.2.2. Milieu effectif	26
3.2.3. Calcul de l'énergie propre	28
3.2.4. Le libre parcours moyen élastique	35
4. Mise en évidence expérimentale de l'onde balistique et de l'onde cohérente	36
4.1. Montage expérimental	37
4.2. Onde balistique / Onde cohérente	39
Références	52

Chapitre II : La diffusion multiple en acoustique / Propagation incohérente de l'intensité

1. Le monde probabiliste en intensité	53
1.1. L'équation de Bethe Salpeter	54
1.2. L'approximation des diagrammes de ladder	61
1.3. Equation de transport / Equation du transfert radiatif	62
1.3.1. Equation de transport	63
1.3.2. Equation du transfert radiatif	64
1.4. L'approximation de la diffusion	66
1.4.1. L'équation de la diffusion en milieu infini	66
1.4.2. Conditions aux limites pour un milieu semi-infini	69
1.4.3. Courbe de distribution des temps de vol	70
1.4.4. Transmittance stationnaire	72
2. Mesures expérimentales de l'intensité moyenne transmise	73
2.1. Détermination du libre parcours moyen de transport	74
2.2. Détermination de la constante de diffusion et du libre parcours moyen d'absorption	75
Annexes	79
Références	86

Chapitre III : Diffusion multiple et réciprocité

1. Enregistrement de l'intensité rétrodiffusée	87
1.1. Une réalisation du désordre	88
1.2. Moyenne sur le désordre	90
1.2.1. Cône stationnaire	90
1.2.2. Cône dynamique	91
2. Une explication heuristique	93

3. Calcul analytique	97
3.1. Cône dynamique	97
3.2. Cône stationnaire	106
4. Application de l'effet de rétrodiffusion cohérente à la détermination des propriétés de transport d'une onde ultrasonore dans un milieu aléatoire désordonné	109
4.1. Paramètres de transport pour un échantillon « prototype »	110
4.2. Cône de rétrodiffusion cohérente dans un nuage de bulles	110
4.3. Caractérisation d'aciers à grains	113
Références	117
Chapitre IV : Diffusion multiple et réversibilité	118
1. Réversibilité et chaos	120
1.1. La réversibilité en physique	120
1.2. Le retournement temporel comme outil d'investigation du chaos	121
2. Réversibilité des ondes ultrasonores et miroirs à retournement temporel	123
2.1. Réciprocité et réversibilité	123
2.3. La cavité à retournement temporel	125
2.3. Les miroirs à retournement temporel	127
2.4. Formalisme de la réponse impulsionnelle	128
3. Mise en évidence de la réversibilité en milieu multidiffuseur	131
4. Effets des erreurs dans la définition de l'onde retournée temporellement	134
4.1. Troncature spatiale	136
4.2. Retournement temporel par fenêtres	142
4.2.1. Transmission	143
4.2.2. Rétrodiffusion	146
4.2.2.1. Retournement temporel en rétrodiffusion : l'effet miroir	146
4.2.2.2. Retournement temporel dynamique	149
4.3. Effets de quantification : le retournement temporel 1 bit	156
5. Effets d'une modification du milieu	161
5.1. Modification de la température : une perturbation globale	161
5.2. Soustraction de diffuseurs : une perturbation locale	165
Références	170

Chapitre I

La diffusion multiple en acoustique / Onde balistique et onde cohérente

Dans ce chapitre et le suivant, nous étudions, tant d'un point de vue théorique qu'expérimental, la propagation d'une onde ultrasonore dans un milieu désordonné. Lorsque le milieu est multidiffuseur, la résolution du problème inverse s'avère impossible. On lève alors la difficulté en s'intéressant à des moyennes sur le désordre des quantités physiques d'intérêt, amplitude ou intensité. Cette approche constitue le point de départ de la « théorie de la diffusion multiple ». Aucun ouvrage sur ce sujet n'existe spécifiquement en acoustique. Seul un article présente de façon synoptique les différents « régimes » de transport de l'énergie d'une onde acoustique dans un milieu désordonné [1]. Nos principales sources d'information seront deux monographies souvent présentées comme les références dans le domaine [2,3]. Dans un souci pédagogique, nous ne nous contenterons pas de reprendre leurs conclusions mais nous nous attacherons à détailler certains développements sur lesquels on passe parfois vite dans la littérature. Pour ceux qui trouveraient ce chapitre et le suivant encore trop arides, nous précisons que les principales conclusions en sont résumées au début de chaque partie expérimentale.

L'objet des trois premiers paragraphes de ce chapitre est d'introduire la partie de la théorie de la diffusion multiple qui concerne la propagation de l'amplitude. Pour cela, nous partons de l'équation de propagation la plus générale pour une onde ultrasonore se propageant dans un milieu hétérogène. Nous montrons alors que l'amplitude moyenne du champ ultrasonore obéit à une équation de *Dyson*. Celle-ci est résolue en utilisant une approximation de milieu dilué qui conduit à la notion de *milieu effectif* et de *libre parcours moyen élastique*. Dans le quatrième paragraphe, nous donnons une illustration expérimentale des concepts rencontrés. Pour cela, nous nous appuyons sur des résultats obtenus sur un échantillon aléatoire « prototype » constitué de milliers de tiges en acier aléatoirement réparties et immergées dans l'eau. L'étude des signaux transmis à travers ce milieu est réalisée à l'aide d'outils aux possibilités originales, les réseaux de transducteurs piézoélectriques, qui donnent accès à la répartition spatio-temporelle du champ multidiffusé. En particulier, nous mettons ainsi en lumière la distinction entre onde balistique et onde cohérente.

1. Présentation du formalisme

1.1. Formalisme de Green

Commençons par quelques brefs rappels sur le formalisme de Green sur lequel nous fonderons nos développements ultérieurs.

Le formalisme des fonctions de Green fournit un cadre efficace et élégant à la résolution de problèmes ondulatoires tels que la propagation d'une onde acoustique en milieu hétérogène. D'une part, il est un moyen de résoudre une équation différentielle dans des cas particulièrement complexes où les méthodes classiques échouent. En particulier, la forme des solutions se prête bien aux développements en perturbations. Mais d'autre part, bien loin de ne fournir qu'un simple artifice mathématique, il apporte une solution dont l'interprétation physique est éclairante. La fonction de Green spatio-temporelle d'un système donne en effet sa réponse à une excitation initiale de spectres spatial et temporel infinis. Par conséquent, elle est un outil idéal pour étudier ses « résonances ».

1.1.1. En milieu homogène

La propagation d'une onde acoustique en milieu fluide, continu, compressible, linéaire, homogène, isotrope et sans pertes, est gouvernée par l'équation suivante :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \Delta p_0(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

$p_0(\mathbf{r}, t)$ désignant la pression instantanée au point \mathbf{r} et c la vitesse.

Si nous cherchons des solutions monochromatiques du type $p_0(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ P_0(\omega, \mathbf{r}) e^{-j\omega t} \}$, l'équation précédente peut se mettre sous la forme, connue sous le nom d'équation de Helmholtz :

$$\Delta P_0(\omega, \mathbf{r}) + k_0^2 P_0(\omega, \mathbf{r}) = 0 \quad (2)$$

avec $k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ où ω est la pulsation.

L'équation de Green s'obtient en remplaçant le second membre de l'équation (2) par un Dirac spatial qui représente une source ponctuelle émettant une onde acoustique à la fréquence ω :

$$\Delta G_0(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + k_0^2 G_0(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3)$$

En milieu homogène, la fonction de Green ne dépend que de la différence $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Les conditions aux limites sont par exemple prises telles que $G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \rightarrow 0$ pour $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$.

Il peut être avantageux de résoudre cette équation en décomposant la fonction de Green sur ses fréquences spatiales :

$$G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int G_0(\omega, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d\mathbf{k} \quad (4)$$

En reportant (4) dans (3), nous obtenons finalement:

$$G_0(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{k_0^2(\omega) - k^2} \quad (5)$$

L'intérêt de cette écriture est de faire apparaître les « modes » du système, c'est-à-dire les nombres d'ondes vérifiant la relation de dispersion du milieu, comme les pôles de la fonction de Green.

Après transformation de Fourier pour revenir à l'espace réel, la solution de Green de l'espace libre s'écrit à trois dimensions :

$$G_0^\pm(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{\exp(\pm ik_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6)$$

G_0^+ est l'expression d'une onde divergente depuis le point source, G_0^- d'une onde convergente vers le point source. Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre, notre « prototype » de milieu désordonné a un caractère bidimensionnel ainsi que les sources ultrasonores utilisées pour le sonder. Pour décrire la propagation dans l'espace libre depuis un point source jusqu'à l'échantillon, nous aurons donc plutôt besoin de la fonction de Green à deux dimensions, soit :

$$G_0^\pm(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \mp \frac{i}{4} H_0^{(1,2)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (7)$$

où G_0^+ représente une onde cylindrique divergente et G_0^- une onde cylindrique convergente. $H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel du premier ordre, du premier type pour l'onde divergente, $H_0^{(2)}$ la fonction de Hankel du premier ordre du second type pour l'onde convergente.

1.1.2. En milieu hétérogène

En acoustique, dans un modèle "liquide-liquide", on peut définir les hétérogénéités du milieu par une dépendance spatiale de la compressibilité $\chi(\mathbf{r})$ et de la densité $\rho(\mathbf{r})$ et donc de la vitesse $c(\mathbf{r}) = 1/\sqrt{\rho(\mathbf{r})\chi(\mathbf{r})}$. L'équation de propagation peut alors s'écrire pour une onde monochromatique [4].

$$\Delta P(\omega, \mathbf{r}) + k^2(\omega, \mathbf{r})P(\omega, \mathbf{r}) = -(\nabla \log \rho(\mathbf{r}) \cdot \nabla)P(\omega, \mathbf{r}) \quad (8)$$

avec $k^2(\omega, \mathbf{r}) = \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{r})}$. Les hétérogénéités du milieu induisent donc non seulement une dépendance spatiale de la vitesse mais également l'apparition d'un nouveau terme source.

Définissons la perturbation $\sigma(\mathbf{r})$ telle que $k^2(\omega, \mathbf{r}) = k_0^2(\omega) - \sigma(\mathbf{r})$. La solution de l'équation (8) est alors donnée par :

$$P(\omega, \mathbf{r}) = P_0(\omega, \mathbf{r}) + \int G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') [\sigma(\mathbf{r}') - (\nabla \log \rho(\mathbf{r}') \cdot \nabla)] P(\omega, \mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

où $P_0(\omega, \mathbf{r})$ est la solution de l'équation de propagation en milieu homogène (2). En définissant l'opérateur « potentiel » caractérisant l'action des diffuseurs sur le champ acoustique par $V(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}) - (\nabla \log \rho(\mathbf{r}) \cdot \nabla)$, on peut finalement écrire:

$$P(\omega, \mathbf{r}) = P_0(\omega, \mathbf{r}) + \int G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') P(\omega, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (9)$$

Cette équation self-consistante conduit, si $P(\omega, \mathbf{r}')$ est remplacé par l'expression du membre de droite évaluée en \mathbf{r}' , au développement de Born bien connu. Dans la pratique, pour l'étude des milieux biologiques [5] ou le contrôle non destructif de certains matériaux [6], nous travaillons à des fréquences de l'ordre du MHz. Limiter le développement au premier ordre peut alors suffire pour expliquer les résultats expérimentaux. Cela revient à faire une « approximation de diffusion simple » (cf. paragraphe 3.1 à ce sujet).

La fonction de Green en milieu hétérogène obéit à l'équation :

$$\Delta G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + k_0^2 G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = V(\mathbf{r}) G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (10)$$

La solution en est simplement donnée par :

$$G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') + \int G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_1) G(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}') d\mathbf{r}_1 \quad (11)$$

Remarquons que si G_0 ne dépend que de $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ (le milieu homogène est invariant par translation), G dépend dans le cas général de deux variables d'espace \mathbf{r} et \mathbf{r}' .

Cette équation constituera notre paradigme. Dans la suite du manuscrit, nous allons en déduire l'équation de *Dyson* à laquelle obéit la moyenne sur le désordre de l'amplitude du champ de pression pour un milieu hétérogène désordonné, ce qui nous permettra d'introduire le concept de *milieu effectif* et la notion de *libre parcours moyen élastique*.

1.2. Introduction de la matrice **T**

1.2.1. Espace réel

Il est intéressant de construire à partir de l'opérateur potentiel V à une entrée un opérateur à deux entrées en posant :

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_1)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

L'équation (11) peut alors se réécrire:

$$G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') + \iint G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1)V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)G(\omega, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}')d\mathbf{r}_1d\mathbf{r}_2$$

On peut maintenant considérer chacun des termes de l'équation comme les éléments de matrices continues et écrire l'équation (11) sous forme matricielle:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G} \tag{12}$$

avec les définitions :

$$(\mathbf{G}_0)_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} = G_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

$$(\mathbf{G})_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} = G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

$$(\mathbf{V})_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

On peut passer d'une formulation self consistante de \mathbf{G} (Eq. 12) à une écriture où n'apparaît que \mathbf{G}_0 dans le membre de droite; pour cela, développons l'équation (12) sous la forme:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 + \dots$$

et définissons la matrice \mathbf{T} de diffusion par :

$$\mathbf{T} = \mathbf{V} + \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} + \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} + \dots \quad (13)$$

L'équation (12) devient alors :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{T} \mathbf{G}_0 \quad (14)$$

Nous obtenons ainsi une équation formellement analogue au développement de Born du premier ordre à ceci près que la matrice de diffusion inclut, elle, tous les ordres de diffusion. L'écriture matricielle présente l'avantage d'être concise; nous l'utiliserons largement dans la suite sans hésiter, le cas échéant, à revenir à la forme intégrale des équations puisqu'il y a équivalence entre les deux formulations.

1.2.2. Espace des \mathbf{k}

Une matrice de diffusion peut également être définie dans l'espace des \mathbf{k} . Dans la suite du manuscrit, nous aurons besoin de son expression pour établir des résultats importants.

La transformée de Fourier en \mathbf{r} et en \mathbf{r}' de l'équation (11) s'écrit :

$$G(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = G_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + \int d\mathbf{q} G_0(\mathbf{k}) V(\mathbf{k} - \mathbf{q}) G(\mathbf{q}, \mathbf{k}') \quad (15)$$

avec $G_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = G_0(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$.

Définissons les matrices continues :

$$\overline{(\mathbf{G}_0)}_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = G_0(\mathbf{k},\mathbf{k}')$$

$$\overline{(\mathbf{G})}_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = G(\mathbf{k},\mathbf{k}')$$

$$\overline{(\mathbf{V})}_{\mathbf{k},\mathbf{q}} = V(\mathbf{k} - \mathbf{q})$$

Avec ces définitions, l'écriture matricielle de l'équation (15) est formellement identique à celle que nous avons établie dans l'espace réel :

$$\overline{\mathbf{G}} = \overline{\mathbf{G}_0} + \overline{\mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}} \quad (16)$$

De la même façon, on peut définir une matrice de diffusion $\overline{\mathbf{T}}$:

$$\overline{\mathbf{T}} = \overline{\mathbf{V}} + \overline{\mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V}} + \overline{\mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V}} + \dots \quad (17)$$

L'équation (16) se réécrit donc :

$$\overline{\mathbf{G}} = \overline{\mathbf{G}_0} + \overline{\mathbf{G}_0 \mathbf{T} \mathbf{G}_0} \quad (18)$$

La notation matricielle présente donc l'avantage de donner la même forme aux équations dans l'espace réel et dans l'espace des \mathbf{k} .

Voilà donc posé l'essentiel du formalisme à la base de la théorie de la diffusion multiple. Dans la pratique, il s'agit maintenant de l'utiliser afin d'étudier la propagation d'une onde ultrasonore dans un milieu diffusant constitué d'un certain nombre d'obstacles. Le cas le plus simple est celui où l'onde rencontre un diffuseur unique pour lequel on peut définir une matrice de diffusion qui s'écrit dans l'espace réel :

$$\mathbf{t} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_1 \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_1 \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_1 \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_1 + \dots \quad (19)$$

V_1 est le potentiel associé au diffuseur unique. La matrice \mathbf{t} inclut donc les contributions de tous les phénomènes internes à la particule. Cela étant, pour un milieu constitué d'un grand nombre de ces obstacles répartis aléatoirement, cas qui nous intéresse tout particulièrement, il est vain de vouloir déduire toutes les caractéristiques de la propagation ultrasonore à partir de la seule connaissance de la matrice \mathbf{t} . Toutefois, certaines grandeurs moyennes peuvent lui être reliées. Nous allons donc nous intéresser dans le prochain paragraphe à dégager les traits essentiels de l'interaction entre une onde ultrasonore et un diffuseur de forme simple avant de considérer par la suite la propagation dans un milieu multidiffuseur constitué d'un grand nombre de ces obstacles.

2. Diffusion par un obstacle

2.1. Section efficace de diffusion

Nous allons introduire dans ce chapitre la notion de section efficace de diffusion, quantité qui caractérise le "pouvoir diffusant" d'un obstacle rencontré par un champ ondulatoire. Nous rappelons ici que les échantillons multidiffuseurs que nous étudions sont constitués d'un grand nombre de tiges en acier inox immergées dans l'eau.

Nous considérons donc le cas simple d'une onde plane arrivant sur un diffuseur solide cylindrique de rayon R (Fig. 1).

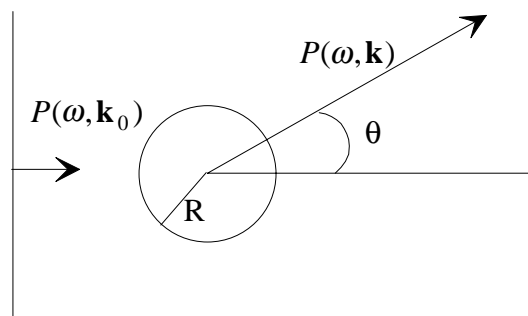


Fig. 1. Diffusion d'une onde plane par un obstacle cylindrique

En champ lointain, l'onde résultante est la somme d'une onde diffusée cylindrique, éventuellement pondérée par un facteur d'anisotropie, et de l'onde plane incidente solution de l'équation homogène (2), ce qui s'exprime par :

$$P(\omega, \mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) - f(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}) \frac{\exp(ik_0 \cdot r)}{\sqrt{r}} \quad (20)$$

Compte tenu de la symétrie du problème, $f(\mathbf{k}_0, \mathbf{k})$ ne dépend que de l'angle de diffusion θ . La section efficace différentielle de diffusion est définie par :

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} = |f(\theta)|^2 \quad (21)$$

et la section efficace totale, qui caractérise le pouvoir diffusant de l'obstacle, est donnée par :

$$\sigma_T = \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta \quad (22)$$

Dans le cas qui nous intéresse, les échantillon étudiés sont constitués de diffuseurs cylindriques de diamètre 0.8 mm. Leur section efficace peut être exprimée comme une série infinie de termes faisant intervenir les fonctions de Hankel [7]. Nous en donnons ci-dessous une représentation en coordonnées polaires pour les fréquences centrales des réseaux de transducteurs que nous utilisons couramment dans nos expériences au laboratoire.

1.4 MHz

0°

3.2 MHz

0°

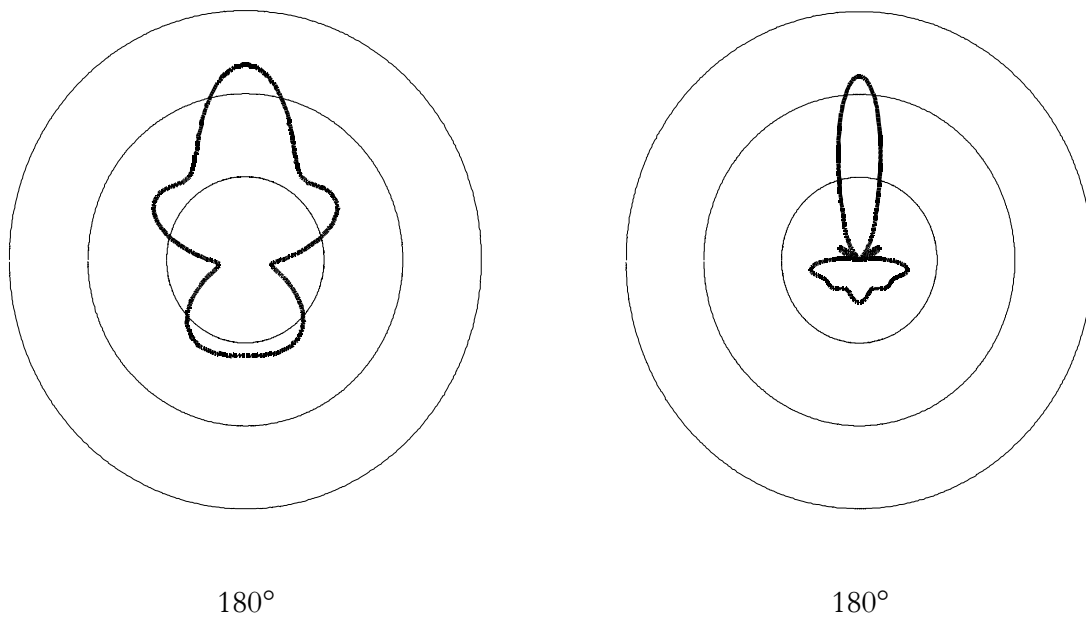


Fig. 2. Représentations polaires de la section efficace différentielle de diffusion d'une tige pour les fréquences centrales des réseaux de transducteurs utilisés dans nos expériences.

Nous retrouvons qualitativement le fait que plus la longueur d'onde est petite devant la taille du diffuseur, plus la diffusion est piquée vers l'avant.

Autour de 1.4 MHz, la section efficace totale est relativement plate (Fig. 3). Autour de 3.2 MHz, la section efficace est globalement croissante mais présente un creux pour 2.9 MHz.

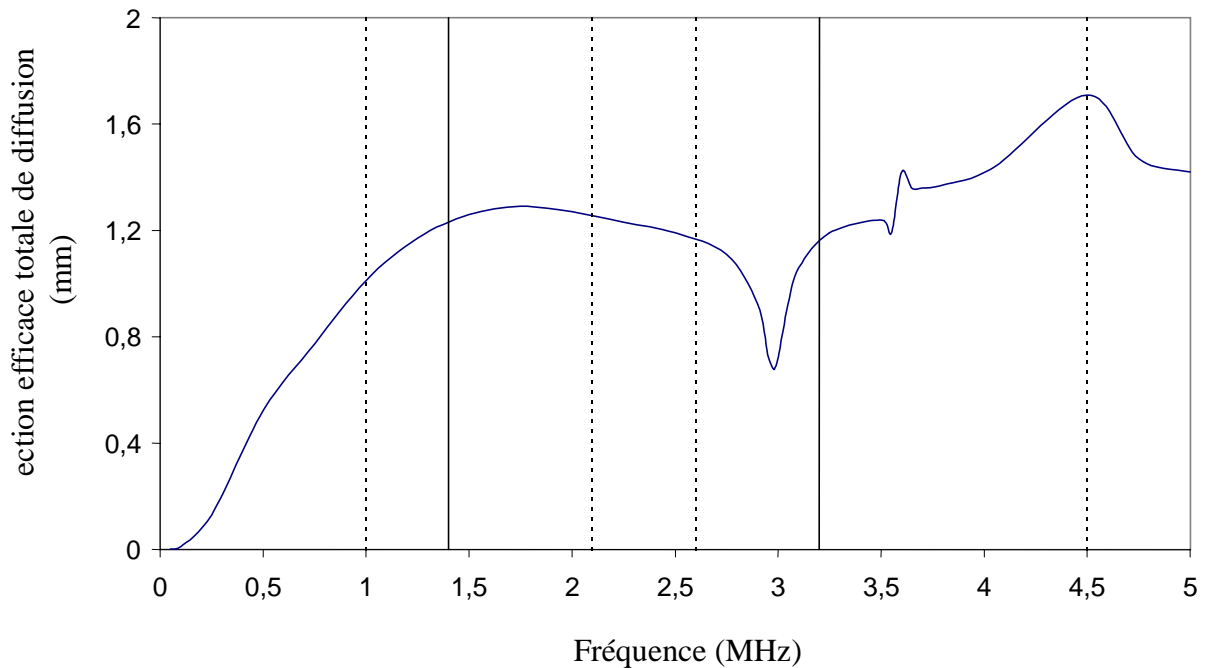


Fig. 3. Evolution de la section efficace totale de diffusion en fonction de la fréquence. Les fréquences centrales des deux réseaux de transducteurs que nous utilisons dans la pratique sont repérées par les deux traits pleins verticaux. Les traits pointillés délimitent les bandes passantes à -20 dB.

Dans les expériences présentées au paragraphe 4, la source est un transducteur piézo-électrique qui émet 5 arches de sinusoides à 3.2 MHz. En réception, nous utilisons un réseau de 128 transducteurs de même fréquence centrale dont la bande passante à -20 dB est indiquée sur la figure 3. Bien que travaillant en régime impulsionnel, nous nous autoriserons toutefois à définir les paramètres caractérisant la propagation pour la fréquence centrale uniquement, ce que nous justifierons expérimentalement.

2.2. Le théorème optique

Il est possible de relier le coefficient de pondération apparaissant dans l'équation (20) à la matrice de diffusion du diffuseur unique définie dans l'espace des \mathbf{k} . Pour cela, on part de la solution (9) de l'équation de propagation en milieu hétérogène écrite en notation bracket dans le cas d'un diffuseur unique :

$$|P\rangle = |P_0\rangle + \mathbf{GV}_1|P\rangle$$

Son développement s'écrit :

$$|P\rangle = |P_0\rangle + \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_1 |P_0\rangle + \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_1 \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_1 |P_0\rangle + \dots = |P_0\rangle + \mathbf{G}_0 \mathbf{t} |P_0\rangle$$

Dans le cas où l'onde incidente $|P_0\rangle$ est une onde plane, l'équation précédente s'écrit :

$$P(\omega, \mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) + \sum_{\mathbf{r}_1} \sum_{\mathbf{r}_2} \langle \mathbf{r} | \mathbf{G}_0 | \mathbf{r}_1 \rangle \langle \mathbf{r}_1 | \mathbf{t} | \mathbf{r}_2 \rangle \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_2)$$

En champ lointain, la solution de Green homogène (7) à deux dimensions peut être approchée par :

$$G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \approx -\frac{(1+i)}{4\sqrt{\pi k_0} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \exp(ik_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)$$

Les éléments $t_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2}$ de la matrice de diffusion ne sont non nuls que pour $r_1, r_2 < R$. Pour $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \gg R$, on peut faire le développement limité :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = (r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \theta)^{1/2} \approx r(1 - r_1 \cos \theta / r) = r - r_1 \cos \theta$$

On obtient donc finalement :

$$P(\omega, \mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) - \frac{1+i}{4\sqrt{\pi k_0} r} \exp(ik_0 r) \sum_{\mathbf{r}_1} \sum_{\mathbf{r}_2} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1) \langle \mathbf{r}_1 | \mathbf{t} | \mathbf{r}_2 \rangle \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_2)$$

et en notant que : $\langle \mathbf{r}_2 | \mathbf{k}_0 \rangle = \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_2)$,

$$P(\omega, \mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) - \frac{1+i}{4\sqrt{\pi k_0} r} \exp(ik_0 r) \sum_{\mathbf{r}_1} \sum_{\mathbf{r}_2} \langle \mathbf{k} | \mathbf{r}_1 \rangle \langle \mathbf{r}_1 | \mathbf{t} | \mathbf{r}_2 \rangle \langle \mathbf{r}_2 | \mathbf{k}_0 \rangle$$

En utilisant la « relation de fermeture » $\sum_{\mathbf{r}_1} |\mathbf{r}_1\rangle\langle\mathbf{r}_1| = \mathbf{I}$ où \mathbf{I} désigne la matrice identité, on trouve

donc :

$$P(\omega, \mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) - \frac{1+i}{4\sqrt{\pi k_0 r}} \exp(ik_0 r) \langle \mathbf{k} | \mathbf{t} | \mathbf{k}_0 \rangle$$

On peut finalement écrire :

$$f(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}) = -\frac{1+i}{4\sqrt{\pi k_0}} \langle \mathbf{k} | \mathbf{t} | \mathbf{k}_0 \rangle \quad (23)$$

En particulier, l'amplitude diffusée vers l'avant est reliée à $\langle \mathbf{k}_0 | \mathbf{t} | \mathbf{k}_0 \rangle$. La perte d'énergie dans cette direction est reliée à la partie imaginaire de cette quantité. Or, pour un milieu par ailleurs sans absorption, l'énergie perdue dans cette direction est celle qui participe aux diffusions dans les autres directions, ce qui s'exprime par :

$$\sigma_T = -\frac{1}{k_0} \text{Im} \mathbf{t}_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0} \quad (24)$$

Ce théorème de conservation est le « théorème optique » dont on trouve dans la littérature de nombreuses démonstrations [1,2,3].

3. Propagation de l'amplitude ultrasonore dans un milieu désordonné

Il s'agit à présent de dégager les propriétés essentielles de la propagation d'une onde acoustique dans un milieu multidiffuseur désordonné. Nous verrons dans ce manuscrit qu'il existe différentes descriptions possibles, fonctions en particulier du degré de désordre et de la taille de l'échantillon. Les deux premières s'intéressent à l'amplitude. Nous les intitulerons « monde réel » et « monde probabiliste en amplitude ».

3.1. Le monde réel : approximation de Born

Comme nous l'avons noté dans le premier paragraphe, la solution $G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ de l'équation de propagation en milieu hétérogène peut s'exprimer sous la forme d'un développement, connu sous le nom de série de Born, écrit en notation matricielle :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 + \dots \quad (25)$$

ou sous forme intégrale :

$$G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \quad (26)$$

$$G_0(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$$

$$+ \int G_0(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_1) G_0(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_1$$

$$+ \iint G_0(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_1) G_0(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_2) G_0(\omega, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$$

$$+ \iiint G_0(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_1) G_0(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_2) G_0(\omega, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) V(\mathbf{r}_3) G_0(\omega, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3$$

+...

Chacune des intégrales représente un ordre de diffusion. Une lecture de chaque intégrale de droite à gauche nous éclaire sur la signification de chacun des termes. Par exemple, le troisième terme représente la propagation de l'onde de \mathbf{r}_0 à \mathbf{r}_2 où elle rencontre une première hétérogénéité définie

par la valeur du potentiel en ce point, puis de \mathbf{r}_2 à \mathbf{r}_1 où elle rencontre une seconde hétérogénéité et finalement jusqu'au point d'observation \mathbf{r} .

Par nature, les échantillons auxquels nous nous intéressons sont des milieux discrets constitués d'un grand nombre de diffuseurs individuels identiques contribuant à l'opérateur potentiel V . Il est donc légitime d'écrire ce dernier comme la somme sur les positions des diffuseurs de l'opérateur potentiel V_1 défini pour un diffuseur, soit:

$$V(\mathbf{r}) = \sum_i V_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (27)$$

Posons :

$$(\mathbf{V}_i)_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} = V_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Alors, la matrice \mathbf{V} est simplement la somme des « matrices potentiel » associées à chacun des diffuseurs :

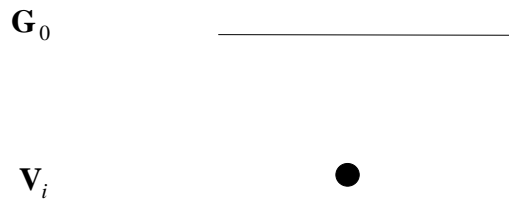
$$\mathbf{V} = \sum_i \mathbf{V}_i \quad (28)$$

La solution de Green s'écrit donc en notation matricielle en fonction des potentiels individuels :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G} = & \mathbf{G}_0 & (29) \\
 & + \sum_i \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0 \\
 & + \sum_i \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0 \\
 & + \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_j \mathbf{G}_0 \\
 & + \sum_i \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0 \\
 & + \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_j \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0 \\
 & + \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_j \mathbf{G}_0 \\
 & + \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_j \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0 \\
 & + \sum_i \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j \neq i} \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_j \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_k \mathbf{G}_0 \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$






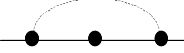

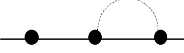
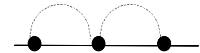
Ainsi, il apparaît plus clairement deux types de terme; les premiers, pour lesquels les indices de sommation sont tous différents entre eux, correspondent à des chemins de diffusion ne repassant jamais par un même diffuseur tandis que les autres incluent des diffusions récurrentes.

Afin de simplifier l'écriture, il est possible de représenter le développement précédent comme une somme infinie de diagrammes de Feynman. A cette fin, nous adoptons les conventions de Feynman suivantes :



Une ligne horizontale représente le propagateur en milieu homogène du point \mathbf{r}_i au point \mathbf{r}_j tandis que le potentiel du i ème diffuseur est représenté par un disque plein.

Le développement (29) s'écrit avec les conventions ainsi définies :

	G	G	(30)
=		= G_0	
+		+ $\sum_i G_0 V_i G_0$	
+		+ $\sum_i \sum_{j \neq i} G_0 V_i G_0 V_j G_0$	
+		+ $\sum_i G_0 V_i G_0 V_i G_0$	
+		+ $\sum_i \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j \neq i} G_0 V_i G_0 V_j G_0 V_k G_0$	
+		+ $\sum_i \sum_{j \neq i} G_0 V_i G_0 V_j G_0 V_i G_0$	
+		+ $\sum_i \sum_{j \neq i} G_0 V_i G_0 V_i G_0 V_j G_0$	
+		+ $\sum_i \sum_{j \neq i} G_0 V_j G_0 V_i G_0 V_i G_0$	
+		+ $\sum_i G_0 V_i G_0 V_i G_0 V_i G_0$	
+ ...		+ ...	

Pour une plus grande lisibilité, nous avons fait correspondre une ligne du développement à une ligne de l'équation (29). Les points appartenant à un même diffuseur sont reliés par une ligne pointillée.

L'écriture est allégée. Pour autant, l'avantage de cette écriture n'est pas uniquement formel. En effet, à un diagramme correspond un terme et un seul de l'équation (29). Par conséquent, nous pourrons mener certains calculs dans l'espace des diagrammes, en profitant de leurs propriétés

topologiques pour effectuer des regroupements entre diagrammes de même nature et simplifier ainsi certains calculs.

Dans le développement (30), il apparaît qu'un ordre de diffusion donné peut mettre en jeu plusieurs fois le même diffuseur. Il est donc avantageux d'introduire, pour simplifier davantage encore l'écriture, un symbole pour la matrice \mathbf{t} d'une particule définie précédemment.

$$\begin{aligned}
 \times &= \text{---} \bullet \text{---} && (31) \\
 &+ \text{---} \bullet \text{---} \overset{\text{---}}{\text{---}} \bullet \text{---} \\
 &+ \text{---} \bullet \text{---} \overset{\text{---}}{\text{---}} \bullet \text{---} \overset{\text{---}}{\text{---}} \bullet \text{---} \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

Le développement (27) se réécrit alors :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G} &= \frac{\mathbf{G}_0}{\quad} & (32) \\
 &+ \frac{\sum_i \mathbf{G}_0 \mathbf{t}_i \mathbf{G}_0}{\quad \times \quad} \\
 &+ \frac{\sum_i \sum_{i \neq j} \mathbf{G}_0 \mathbf{t}_i \mathbf{G}_0 \mathbf{t}_j \mathbf{G}_0}{\quad \times \quad \times \quad} \\
 &+ \frac{\sum_i \sum_{j \neq i} \sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} \mathbf{G}_0 \mathbf{t}_i \mathbf{G}_0 \mathbf{t}_j \mathbf{G}_0 \mathbf{t}_k \mathbf{G}_0}{\quad \times \quad \times \quad \times \quad} + \frac{\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{G}_0 \mathbf{t}_i \mathbf{G}_0 \mathbf{t}_j \mathbf{G}_0 \mathbf{t}_i \mathbf{G}_0}{\quad \times \quad \times \quad \times \quad} \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

Dans la pratique, il est illusoire de vouloir accéder, même numériquement, à la solution de l'équation de propagation en utilisant ce développement. Il n'est que quelques cas simples où l'on peut l'utiliser en le tronquant aux premiers ordres. En particulier, faire l'approximation de Born du premier ordre revient à faire l'approximation de diffusion simple. En effet, c'est alors dire que le champ qui arrive sur chacun des diffuseurs est le champ incident \mathbf{G}_0 . Comme nous l'avons précédemment mentionné, ce cas simple est toutefois d'une importance pratique capitale dans de nombreux milieux où il suffit à décrire les champs transmis et rétrodiffusés.

Lorsque l'ordre de diffusion devient élevé, les théoriciens lèvent généralement la difficulté en s'intéressant non plus à une réalisation du désordre mais en considérant des moyennes sur celui-ci, c'est-à-dire pour nous sur toutes les positions possibles des diffuseurs. Notre échantillon est en effet constitué de diffuseurs identiques répartis de façon homogène. La position des diffuseurs est donc le

seul paramètre caractéristique du désordre. Nous entrons alors, première étape « de notre voyage initiatique », dans le monde probabiliste en amplitude.

3.2. Le monde probabiliste en amplitude

3.2.1. L'équation de Dyson

Nous cherchons donc à calculer la moyenne sur le désordre de la fonction de Green en amplitude. Pour cela, nous utilisons, comme dans le paragraphe précédent, un formalisme dérivé des diagrammes de Feynman.

Dans un premier temps, nous introduisons Σ l'opérateur « énergie propre », encore appelé « opérateur de masse », dénominations tirées de la théorie quantique des champs [8,9], défini tel que :

$$\langle G(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \rangle = G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') + \iint G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \Sigma(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \langle G(\omega, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}') \rangle d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (33)$$

$\langle G \rangle$ désigne la moyenne sur le désordre de la fonction de Green. Il s'agit donc une quantité invariante par translation. L'équation (33) est connue sous le nom d'équation de *Dyson*. Cette définition ne faisant intervenir que G_0 et $\langle G \rangle$, Σ est donc aussi un opérateur « non local », invariant par translation. Cette équation à laquelle obéit l'amplitude cohérente, c'est-à-dire la partie de l'amplitude qui résiste à la moyenne sur le désordre, se trouve à la base de l'idée de *milieu effectif* que nous présentons maintenant.

3.2.2. Milieu effectif

Quand on passe à la moyenne, toute l'information sur la diffusion est contenue dans l'opérateur Σ . Pour l'évaluer, il est préférable de passer dans l'espace des \mathbf{k} . En effet, profitant de l'invariance par translation dans le milieu moyen, on peut écrire dans l'espace réel de nombreuses équations comme des produits de convolution (Eq. 33 par exemple). L'intérêt de passer dans l'espace des \mathbf{k} est alors de remplacer des équations intégrales par des équations algébriques.

Ainsi, le deuxième terme de l'équation de *Dyson* (33) est un double produit de convolution qui donne par transformée de Fourier le produit de trois transformées de Fourier. Dans l'espace de Fourier, l'équation de *Dyson* s'écrit donc :

$$\langle G(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}) \rangle = G_0(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}) + G_0(\omega, \mathbf{k}) \Sigma(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}) \langle G(\omega, \mathbf{k}) \rangle \quad (34)$$

Avec : $\Sigma(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}) = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}) \Sigma(\omega, \mathbf{k})$

$G(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}) = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}) G(\omega, \mathbf{k})$

En tenant compte de l'expression de la fonction de Green en milieu homogène (5) établie précédemment, on trouve finalement :

$$\langle G(\omega, \mathbf{k}) \rangle = \frac{1}{k_0^2(\omega) - \Sigma(\omega, \mathbf{k}) - k^2} \quad (35)$$

Si, pour un certain régime de fréquences, $\Sigma(\omega, \mathbf{k})$ devient indépendante de \mathbf{k} , le seul effet de *l'énergie propre* est alors de renormaliser $k_0^2(\omega)$ et l'expression de la moyenne d'ensemble devient formellement identique à celle trouvée en milieu homogène (5). On appelle le milieu dont le nombre d'onde est ainsi renormalisé *milieu effectif*.

Dans la pratique, il existe plusieurs types d'approximations, parmi lesquelles la « Coherent Potentiel Approximation » [1,2], qui conduisent à une *énergie propre* indépendante de \mathbf{k} . Pour notre part, nous allons plutôt utiliser « l'Independent Scattering Approximation (ISA) » qui est une approximation de milieu dilué [10]. Nous allons voir qu'elle consiste, dans l'espace des \mathbf{k} , à ne retenir que le premier terme dans le développement de *l'énergie propre* en fonction de la concentration n de diffuseurs.

3.2.3. Calcul de *l'énergie propre* : « l'Independent Scattering Approximation »

On cherche à calculer l'énergie propre pour un échantillon aléatoire de volume L^d ($d=2$ pour notre prototype de milieu multidiffuseur). On part de la solution (15) de l'équation de propagation dans l'espace des \mathbf{k} :

$$G(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = G_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + \int d\mathbf{q} G_0(\mathbf{k}) V(\mathbf{k} - \mathbf{q}) G(\mathbf{q}, \mathbf{k}')$$

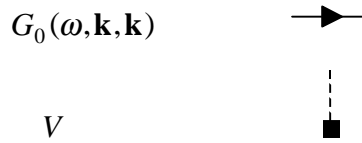
Le développement de $G(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ s'écrit :

$$G(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = G_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + \int d\mathbf{q} G_0(\mathbf{k}) V(\mathbf{k} - \mathbf{q}) G_0(\mathbf{q}, \mathbf{k}') + \int d\mathbf{q} d\mathbf{q}' G_0(\mathbf{k}) V(\mathbf{k} - \mathbf{q}') G_0(\mathbf{q}') V(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) G_0(\mathbf{q}, \mathbf{k}') + \dots$$

Seule $G(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ nous intéresse puisqu'elle représente la partie de l'onde incidente qui va résister à la moyenne sur le désordre. En effet, nous avons vu que la moyenne a pour effet de restaurer la symétrie par translation. Autrement dit, $\langle G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle = \langle G(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \rangle$ et sa transformée de Fourier ne dépend donc que de \mathbf{k} . En tenant compte du fait que $G_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = G_0(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k})$ (cf. paragraphe 1.2.2), on trouve :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = & \hspace{20em} (36) \\ & G_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \\ & + G_0(\mathbf{k}) V(\mathbf{0}) G_0(\mathbf{k}) + \\ & + \int d\mathbf{q} G_0(\mathbf{k}) V(\mathbf{q}) G_0(\mathbf{k} + \mathbf{q}) V(-\mathbf{q}) G_0(\mathbf{k}) + \dots \end{aligned}$$

A ce stade, nous adoptons les conventions de Feynman suivantes [11]:



Une ligne horizontale fléchée représente la fonction de Green en milieu homogène. Le potentiel avec lequel interagit l'onde acoustique est symbolisé par un trait pointillé terminé par un carré. Avec ces notations, le développement précédent s'écrit sous forme symbolique :

$$G(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}) = \begin{array}{c} \longrightarrow \\ + \\ \begin{array}{c} \vec{k} \quad \vec{k} \\ \longrightarrow \longrightarrow \\ \downarrow \\ \blacksquare \\ V(\mathbf{q}=0) \end{array} \\ + \\ \begin{array}{c} \vec{k} \quad \vec{k} + \vec{q} \quad \vec{k} \\ \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \blacksquare \quad \blacksquare \\ V(\mathbf{q}) \quad V(-\mathbf{q}) \end{array} \\ + \dots \end{array}$$

Dans les diagrammes du développement, \mathbf{q} représente un vecteur de diffusion. Par exemple, l'interprétation du troisième terme est la suivante. Une onde de vecteur incident \mathbf{k} rencontre un premier diffuseur caractérisé par le potentiel $V(\mathbf{q})$ (Fig. 4). Ce dernier diffuse l'onde dans la direction $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$. L'onde rencontre alors, sous l'incidence $\mathbf{k} + \mathbf{q}$, un deuxième diffuseur $V(-\mathbf{q})$ qui la diffuse dans la direction $(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \mathbf{q} = \mathbf{k}$, c'est-à-dire dans la direction incidente.

Plus généralement, les diagrammes du développement représentent toutes les combinaisons possibles de diffusions qui aboutissent à $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$.

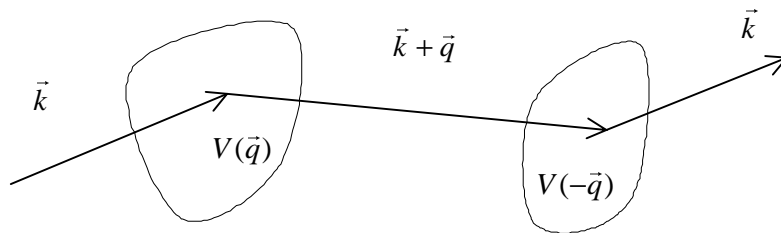


Fig. 4. Interprétation physique du troisième diagramme dans le développement de la fonction de Green dans l'espace des \vec{k} .

A présent, nous cherchons à calculer la moyenne sur le désordre de l'expression (36). La transformée de Fourier $V(\mathbf{q})$ du potentiel $V(\mathbf{r}) = \sum_i V_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = V_1(\mathbf{r}) * \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ s'écrit : $V(\mathbf{q}) = V_1(\mathbf{q}) \sum_i e^{j\mathbf{q}\mathbf{r}_i}$

Dans la moyenne du développement précédent vont donc apparaître des quantités du type $\left\langle \sum_i e^{j\mathbf{q}\mathbf{r}_i} \right\rangle$ et $\left\langle \sum_{i,k} e^{j\mathbf{q}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)} \right\rangle$ facilement calculables si on suppose les N diffuseurs aléatoirement et uniformément répartis sans corrélations entre leurs positions [8]. En effet, dans ce cas, la distribution de probabilité $P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$ pour que le premier diffuseur soit localisé en \mathbf{r}_1 , le deuxième en \mathbf{r}_2 , ..., le n ème en \mathbf{r}_n , est simplement le produit des distributions de probabilité pour chacun des diffuseurs. Pour un échantillon aléatoire de volume L^d , la moyenne sur le désordre d'une quantité X se calcule alors par :

$$\langle X \rangle = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_n P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) X = \prod_{i=1}^N \int d\mathbf{r}_i P(\mathbf{r}_i) X = \frac{1}{L^d} \prod_{i=1}^N \int d\mathbf{r}_i X$$

Alors :

$$\left\langle \sum_k e^{j\mathbf{q}\mathbf{r}_k} \right\rangle = \frac{1}{L^d} \prod_{i=1}^N \int d\mathbf{r}_i \sum_k e^{j\mathbf{q}\mathbf{r}_k} = \frac{N}{L^d} \int d\mathbf{r} e^{j\mathbf{q}\mathbf{r}} = \frac{N}{L^d} \delta(\mathbf{q}) = N\delta_{\mathbf{q}}$$

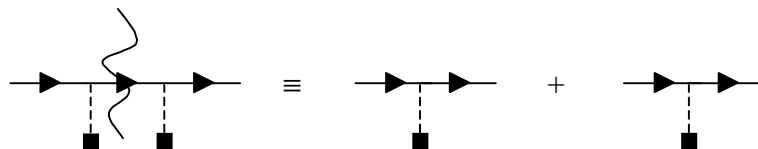
$\delta_{\mathbf{q}}$ désigne le symbole de Kronecker. La moyenne sur le désordre de la somme est nulle sauf si $\mathbf{q}=\mathbf{0}$, auquel cas la somme vaut N . De même,

$$\left\langle \sum_{i,k} e^{j\mathbf{q}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)} \right\rangle = \left\langle N + \sum_{i \neq k} e^{j\mathbf{q}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)} \right\rangle = N + N(N-1)\delta_{\mathbf{q},\mathbf{0}} \approx N^2\delta_{\mathbf{q},\mathbf{0}}$$

On peut alors écrire les premiers termes du développement sous forme analytique et sous forme de diagrammes :

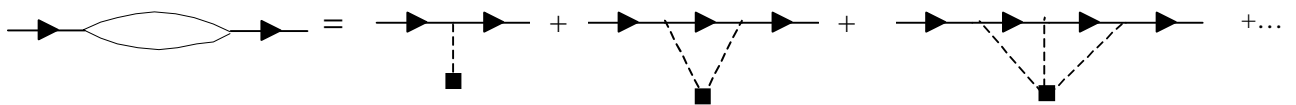
$$\begin{aligned}
 \langle G(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \rangle &= G_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}) & \langle G(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \rangle &= \text{---} \blacktriangleright \text{---} \\
 &+ G_0(\mathbf{k}) N V_1(\mathbf{0}) G_0(\mathbf{k}) & &+ \begin{array}{c} \vec{k} \quad \vec{k} \\ \text{---} \blacktriangleright \text{---} \blacktriangleright \text{---} \\ | \\ \blacksquare \\ N V_1(\mathbf{q} = \mathbf{0}) \end{array} \\
 &+ N \sum_{\mathbf{q}} G_0(\mathbf{k}) V_1(\mathbf{q}) G_0(\mathbf{k} + \mathbf{q}) V_1(-\mathbf{q}) G_0(\mathbf{k}) & &+ \begin{array}{c} \vec{k} \quad \vec{k} + \vec{q} \quad \vec{k} \\ \text{---} \blacktriangleright \text{---} \blacktriangleright \text{---} \blacktriangleright \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ V_1(\mathbf{q}) \quad \blacksquare \quad V_1(-\mathbf{q}) \\ N \end{array} \\
 &+ G_0(\mathbf{k}) N V_1(\mathbf{0}) G_0(\mathbf{k}) N V_1(\mathbf{0}) G_0(\mathbf{k}) & &+ \begin{array}{c} \vec{k} \quad \vec{k} \quad \vec{k} \\ \text{---} \blacktriangleright \text{---} \blacktriangleright \text{---} \blacktriangleright \text{---} \\ | \quad | \\ \blacksquare \quad \blacksquare \\ N V_1(\mathbf{q} = \mathbf{0}) \quad N V_1(\mathbf{q} = \mathbf{0}) \end{array} \\
 &+ \dots & &+ \dots
 \end{aligned}$$

Le développement diagrammatique fait apparaître deux types de diagrammes, ceux qui sont faiblement connectés d'une part, ceux qui sont fortement connectés d'autre part. Un diagramme est dit faiblement connecté s'il peut être divisé en deux diagrammes d'ordre inférieur en coupant une ligne G_0 ; c'est le cas du quatrième diagramme du développement précédent.

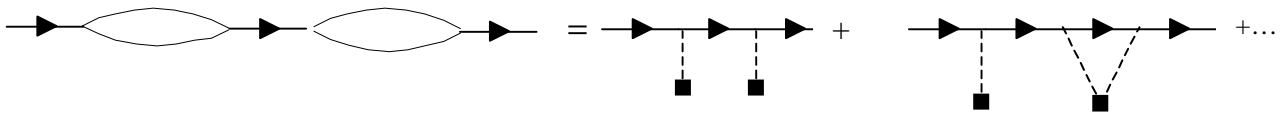


Les diagrammes qui n'ont pas cette propriété sont dits fortement connectés. C'est le cas des deuxièmes et troisièmes diagrammes dans le développement précédent.

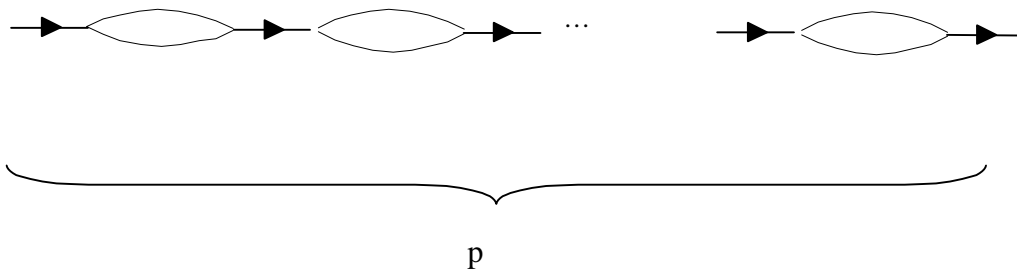
Les diagrammes peuvent être regroupés en fonction de leur *indice de connexité*, c'est-à-dire le nombre de diagrammes fortement connectés qu'ils contiennent. Tous les diagrammes d'indice 1, c'est-à-dire fortement connectés, commencent et finissent par une ligne G_0 et sont de la forme :



La somme des diagrammes d'indice 2 s'écrit alors:



Plus généralement, la somme des diagrammes d'indice p s'écrit :



Finalement, la moyenne sur le désordre de la fonction de Green peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 \langle G(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \rangle &= \text{---} \blacktriangleright \text{---} \\
 &+ \text{---} \blacktriangleright \text{---} \text{---} \text{---} \blacktriangleright \text{---} \\
 &+ \text{---} \blacktriangleright \text{---} \text{---} \text{---} \blacktriangleright \text{---} \text{---} \text{---} \blacktriangleright \text{---} \\
 &+ \text{---} \blacktriangleright \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \blacktriangleright \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \blacktriangleright \text{---} \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que ce développement est solution de l'équation :

$$\text{---} \blacktriangleright \text{---} = \text{---} \blacktriangleright \text{---} + \text{---} \blacktriangleright \text{---} \text{---} \text{---} \blacktriangleright \text{---}$$

On reconnaît l'équation de *Dyson* (33). L'identification des termes prouve que *l'énergie propre* que l'on cherche à calculer est la somme des diagrammes irréductibles (d'indice 1) dans le développement :

$$\underbrace{\text{---} \blacktriangleright \text{---} + \text{---} \blacktriangleright \text{---} \text{---} \text{---} \blacktriangleright \text{---} + \text{---} \blacktriangleright \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \blacktriangleright \text{---}}_{\propto N} + \dots + \underbrace{\text{---} \blacktriangleright \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \blacktriangleright \text{---} + \text{---} \blacktriangleright \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \blacktriangleright \text{---}}_{\propto N^2}$$

« L'Independent Scattering Approximation » consiste à ne retenir dans cette somme que les termes qui sont du premier ordre en N , soit sous forme analytique :

$$\Sigma(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}) = N \left\{ V_1(\mathbf{0}) + \int d\mathbf{q} V_1(\mathbf{q}) G_0(\mathbf{k} + \mathbf{q}) V_1(-\mathbf{q}) + \int d\mathbf{q} d\mathbf{q}' V_1(\mathbf{q}) G_0(\mathbf{k} + \mathbf{q}) V_1(\mathbf{0}) G_0(\mathbf{k} + \mathbf{q}) V_1(-\mathbf{q}) \right\} + \dots$$

On reconnaît dans l'accolade l'expression de l'élément $\mathbf{t}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}$ de la matrice d'un diffuseur. En notant que $\Sigma(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{k}) = \Sigma(\omega, \mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}) = \Sigma(\omega, \mathbf{k}) L^d$ et en définissant la concentration de diffuseurs par $n = N / L^d$, on trouve le résultat remarquable :

$$\Sigma(\omega, \mathbf{k}) = n \mathbf{t}_{\mathbf{k},\mathbf{k}} \quad (37)$$

Si les diffuseurs sont isotropes, ceci étant d'autant plus vrai qu'ils sont petits devant la longueur d'onde, la matrice pour un diffuseur peut s'écrire sous la forme $\mathbf{t}_{\mathbf{k},\mathbf{k}} = t(\omega) \mathbf{I}$ où \mathbf{I} désigne la matrice identité. C'est-à-dire que l'énergie propre devient indépendante de \mathbf{k} .

Posons alors : $k_e^2 = k_0^2(\omega) - \Sigma(\omega)$. Dans ce cas, la moyenne de la fonction de Green s'écrit à deux dimensions :

$$G_e(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle G^\pm(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \rangle = \mp \frac{i}{4} H_0^{(1,2)}(k_e |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (38)$$

La fonction de Green moyenne est donc une onde cylindrique qui se propage dans un milieu moyen, invariant par translation, dont la vitesse est renormalisée. Le nom d'amplitude cohérente qu'on réserve généralement à la quantité $\langle G(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \rangle$ vient du fait qu'elle est une trace de l'onde incidente. Ce n'est pas pour autant dire que la partie diffuse de l'onde est dépourvue de cohérence, nous y reviendrons. D'ailleurs, certains auteurs préfèrent plutôt conserver le terme de diffusion cohérente pour désigner un processus de diffusion élastique.

3.2.4 Le libre parcours moyen élastique

L'amplitude de la fonction de Green décroît exponentiellement sur une longueur caractéristique égale à $1/\text{Im}k_e$. La décroissance de l'intensité cohérente $\langle |G(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}')|^2 \rangle$ se fait donc sur une distance caractéristique $1/2\text{Im}k_e$ que l'on appelle le coefficient d'extinction ou libre parcours moyen élastique l_e .

En fonction de l'énergie propre, la partie imaginaire du nombre d'onde effectif est donnée par $\text{Im}k_e \approx -\text{Im}\Sigma/2k_0$, soit dans l'approximation de milieu dilué (ISA), $\text{Im}k_e = -n\text{Im}\mathbf{t}_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0}/2k_0$. En utilisant le théorème optique (24), on en déduit la formule fondamentale de « l'Independent Scattering Approximation » :

$$l_e = \frac{1}{n\sigma_T} \quad (39)$$

On retrouve la formule classique donnant, pour une particule dans un champ de diffuseurs sans interactions entre eux, la distance entre deux chocs.

Finalement, pour un échantillon dont l'épaisseur L est comparable ou inférieure au libre parcours moyen élastique, enregistrer l'onde cohérente est un moyen de caractériser le milieu. En moyenne, l'échantillon peut en effet être traité comme un milieu homogène dans lequel l'onde se propage avec une vitesse renormalisée et une amplitude décroissante sur une longueur caractéristique l_e . Au-delà de quelques libres parcours moyens, l'onde cohérente s'est éteinte et il est nécessaire de s'intéresser aux ordres supérieurs de l'amplitude pour pouvoir décrire la propagation de l'onde dans le milieu, c'est-à-dire que l'on s'intéresse à la propagation incohérente de l'intensité. Nous entrons alors « dans le monde probabiliste en intensité » que nous étudierons dans le second chapitre.

Dans la pratique, il est indispensable de déterminer le libre parcours moyen élastique lorsqu'on s'intéresse à un échantillon diffuseur afin d'adopter le bon mode de description.

Souvent, les expérimentateurs, qui ne disposent que d'une réalisation du désordre, déterminent le libre parcours moyen en suivant la décroissance de l'amplitude de la partie de l'onde qui n'a pas été diffusée, ce que l'on appelle l'onde balistique [12]. Ils confondent donc celle-ci avec l'onde cohérente définie comme une moyenne sur le désordre. Nous allons voir dans le prochain paragraphe que cette confusion n'est pas forcément dramatique quant à l'évaluation du libre parcours moyen.

Cela étant, d'un point de vue plus fondamental, cette confusion masque le fait que si l'onde balistique est la partie essentielle de l'onde cohérente, des ondes diffusées peuvent également y contribuer ce que nous mettons maintenant en lumière expérimentalement.

4. Mise en évidence expérimentale de l'onde balistique et de l'onde cohérente

Résumons en quelques mots les deux paragraphes précédents :

Sur une réalisation du désordre, dans le « monde réel », il est possible, à partir de la mesure des champs transmis ou rétrodiffusés, de tirer des informations quantitatives sur le milieu si celui-ci est simplement diffuseur. En effet, dans ce cas, l'approximation de Born du premier ordre suffit à rendre compte des résultats expérimentaux. Pour des ordres de diffusion plus élevés, il devient difficile, voire impossible, de traiter le problème analytiquement. On passe alors à un mode de description qui fait intervenir des moyennes sur le désordre de l'amplitude.

Dans une approximation de « milieu dilué », tout se passe comme si *l'onde cohérente*, c'est à dire la partie de l'onde qui résiste à la moyenne sur le désordre, se propageait dans un milieu homogène renormalisé, *le milieu effectif*, avec une décroissance exponentielle de son amplitude sur une échelle caractéristique qui mesure *le libre parcours moyen élastique*. Nous avons appelé cette description « monde probabiliste en amplitude ».

A présent, nous utilisons cette théorie pour décrire la propagation d'une onde ultrasonore dans un milieu aléatoire bidimensionnel. Pour cela, nous étudions la décroissance, en fonction de l'épaisseur de l'échantillon, de l'amplitude balistique définie sur une réalisation du désordre et de l'amplitude cohérente définie comme une moyenne sur celui-ci. En particulier, nous montrons que si l'onde balistique résiste à la moyenne sur le désordre, elle n'est pas forcément l'unique contribution à l'onde cohérente.

4.1. Montage expérimental

Notre prototype de milieu diffuseur est constitué de tiges en acier inoxydable aléatoirement réparties (Fig. 5) et immergées dans l'eau.

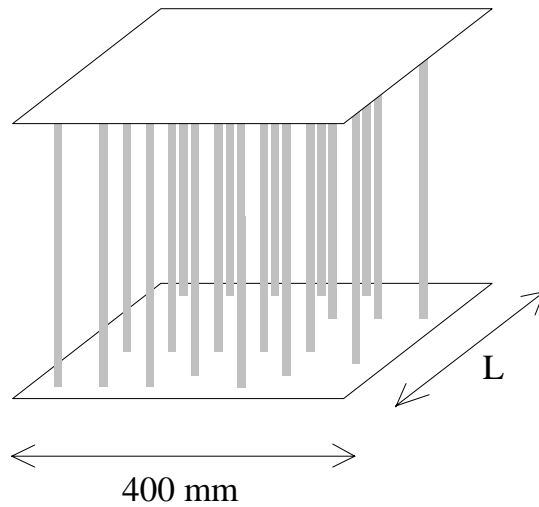


Fig. 5. Prototype de milieu diffuseur

Les caractéristiques d'une tige sont :

- Diamètre : $d = 0.8\text{mm}$
- Vitesse des ondes longitudinales : $C_L = 5.9\text{mm} / \mu\text{s}$
- Vitesse des ondes transverses : $C_T = 3.2\text{mm} / \mu\text{s}$
- Masse volumique : $\rho = 7.85\text{g} / \text{cm}^{-3}$

La distance moyenne entre deux tiges est 2.4mm et leur concentration est $n = 0.1857\text{mm}^{-2}$. Il est possible de faire varier simplement l'épaisseur L du milieu, à densité constante, en ajoutant des tiges.

Comme nous l'avons vu, le premier paramètre qu'il est essentiel de connaître afin d'adopter le « bon » modèle est le *libre parcours moyen élastique*. La section efficace totale de diffusion d'une tige à 3.2 MHz vaut $\sigma_T = 1.16\text{mm}$ (cf. paragraphe 2). En supposant valide l'approximation de milieu dilué présentée au paragraphe 3.2.3., on tire de la formule (39) la valeur théorique du libre parcours moyen élastique $l_e = 4.2\text{mm}$.

Pour le déterminer expérimentalement, nous avons mesuré la décroissance de l'*amplitude cohérente* pour des épaisseurs du milieu variant entre $L \approx 2.4\text{mm}$ et $L = 80\text{mm}$. Pour enregistrer

l'amplitude transmise à travers le milieu, nous utilisons le montage expérimental présenté figures 6 et 7. La source est un transducteur ultrasonore de fréquence centrale 3.2 MHz qui émet cinq arches de sinusoïde. Les signaux transmis sont enregistrés sur un réseau linéaire de 128 transducteurs piézo-électriques, ce qui nous donne accès à la répartition spatiale du champ ultrasonore. La distance entre deux éléments du réseau (0.42 mm) est de l'ordre de la longueur d'onde .

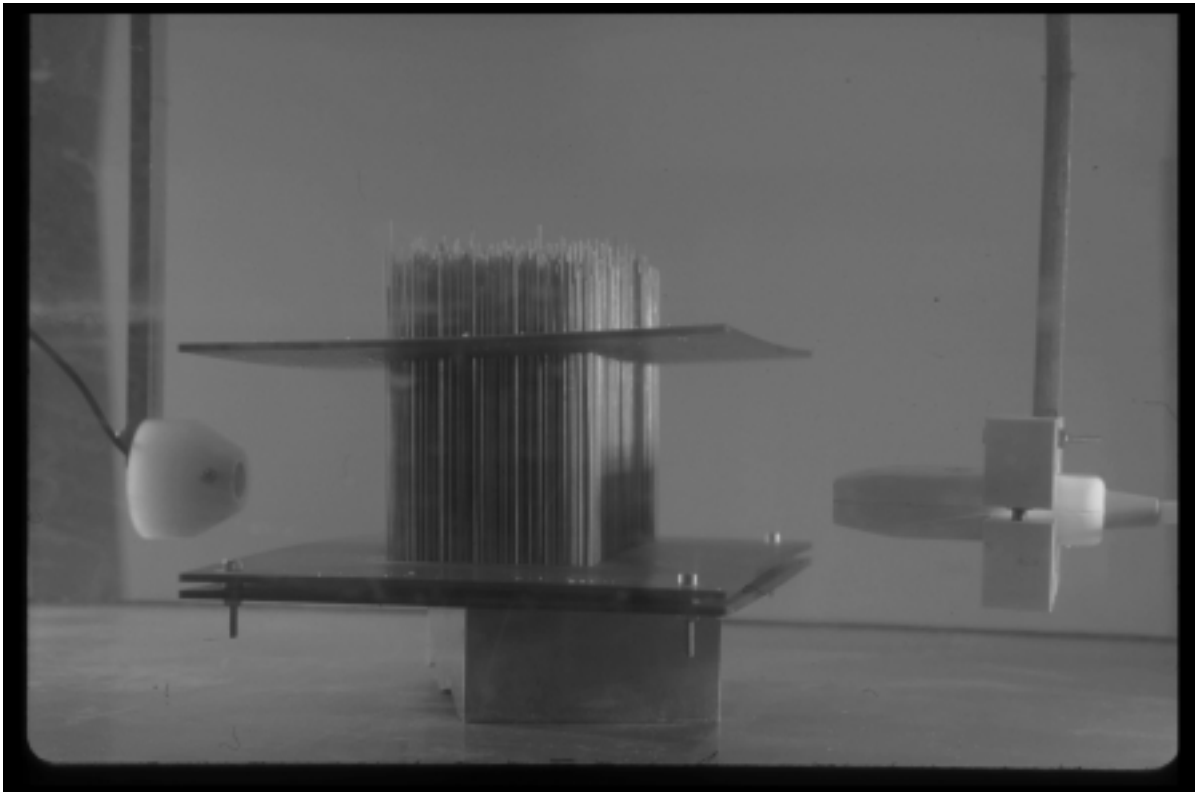


Fig. 6. Montage expérimental pour l'étude des signaux transmis. L'échantillon est immergé dans une cuve remplie d'eau et placé entre un transducteur monoélément (à gauche sur la photo) et un réseau linéaire de 128 transducteurs piézo-électriques (à droite sur la photo).

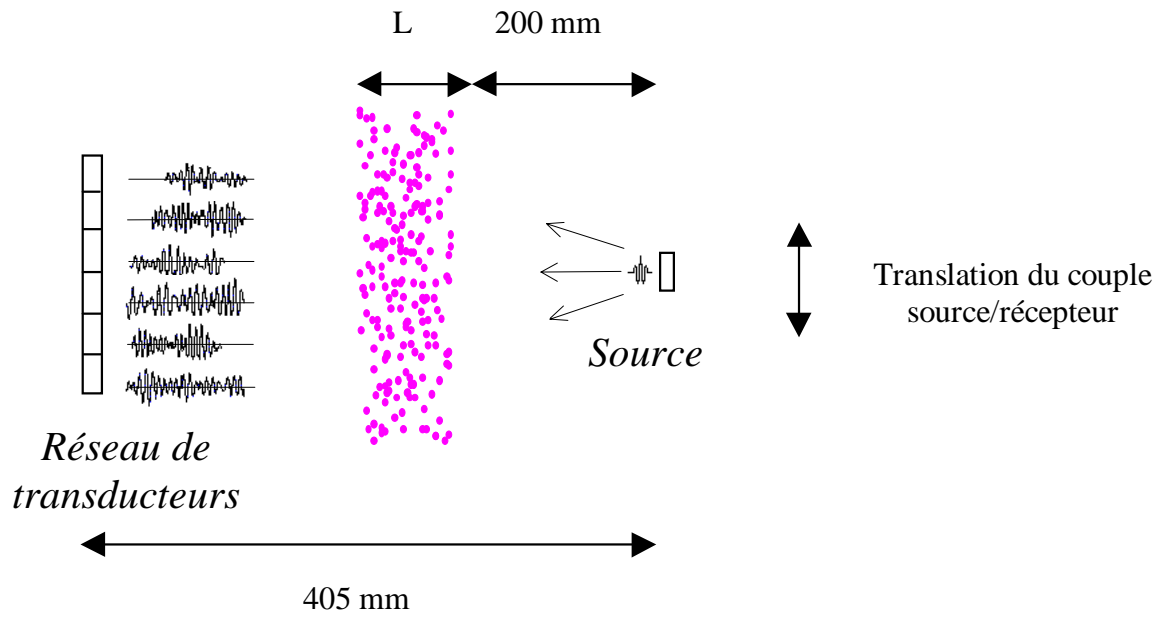


Fig. 7. Montage expérimental pour l'étude des signaux transmis. L'utilisation d'un réseau linéaire de transducteurs piézo-électriques permet de réaliser un échantillonnage spatial de l'onde ultrasonore transmise à travers le milieu. On fait varier la largeur L de l'échantillon, à densité constante, en ajoutant des tiges. La moyenne sur le désordre est réalisée en tradant le couple source / récepteur parallèlement à l'échantillon.

4.2. Onde balistique / Onde cohérente

Onde balistique

Pour une position donnée du couple source/réseau par rapport à l'échantillon et pour des épaisseurs « faibles » (i.e. de l'ordre du libre parcours moyen élastique), l'expérimentateur enregistre le *front balistique* suivi d'ondes diffusées (Fig. 8.a). Nous entendons ici par front balistique la partie de l'onde incidente qui n'a pas été diffusée et qui, par conséquent, se propage à la même vitesse que dans l'eau. Dans la pratique, les premières ondes diffusées peuvent éventuellement se superposer à l'onde balistique.

Onde cohérente

Afin de réaliser une moyenne sur le désordre, nous enregistrons, pour chaque épaisseur, l'amplitude transmise pour 80 positions de l'ensemble source/réseau. Nous avons ainsi accès à *l'amplitude cohérente*, c'est-à-dire à la partie de l'onde incidente qui résiste à la moyenne sur le désordre (Fig. 8.b et 8.d). Moyenner sur le désordre, nous l'avons constaté dans le troisième paragraphe, restaure la symétrie par translation ; cela équivaut à dire que seule la partie de l'onde émergeant du milieu dans la direction incidente résiste à la moyenne sur le désordre. Par conséquent, *l'onde balistique* contribue évidemment à *l'onde cohérente*. D'ailleurs, les expérimentateurs, lorsqu'ils n'ont accès qu'à une réalisation du désordre, confondent généralement *onde balistique* et *onde cohérente*, ce qui ne va pas sans soulever quelques ambiguïtés.

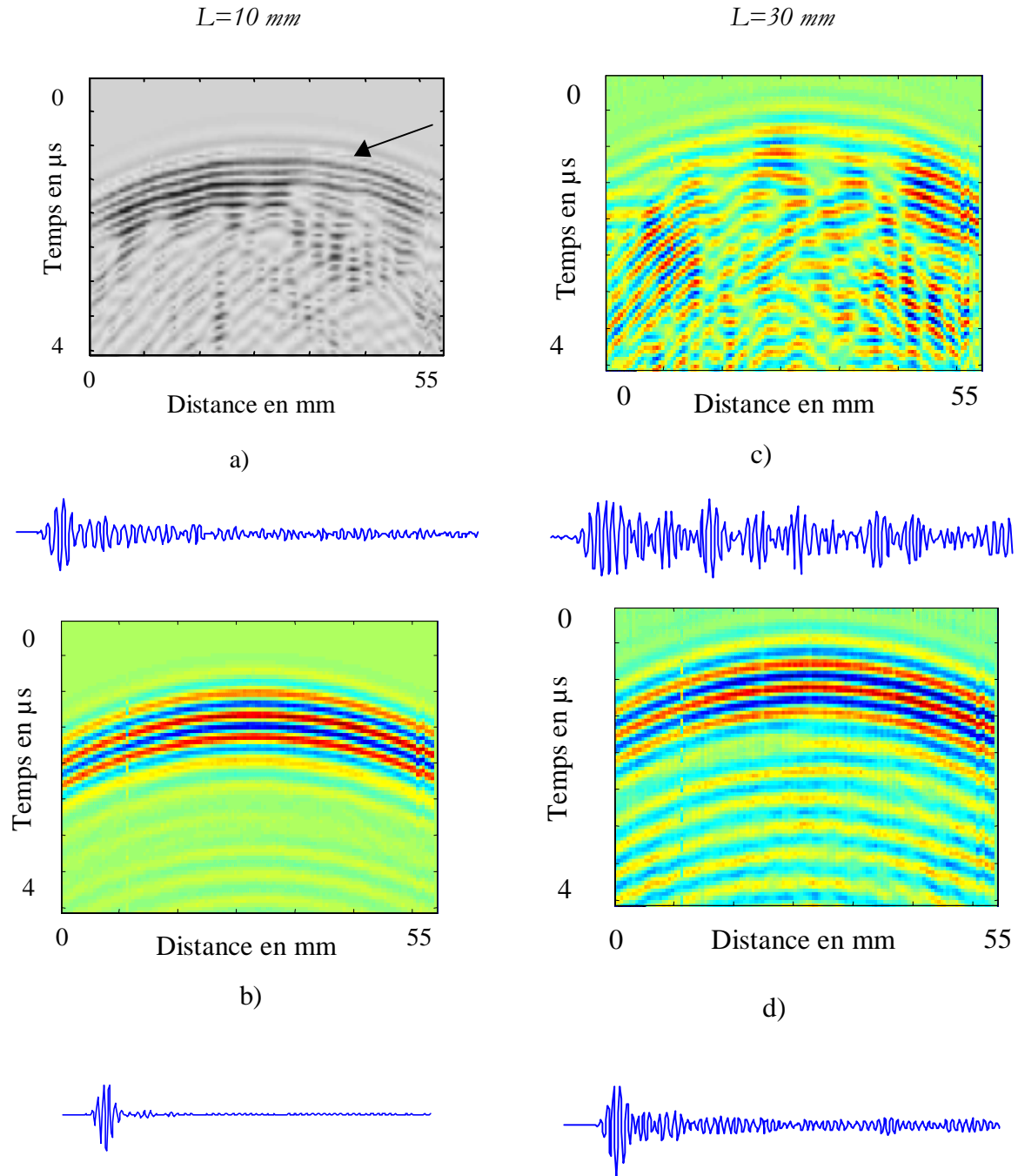


Fig. 8. Représentation B-Scan des signaux transmis pour deux épaisseurs différentes du milieu multidiffuseur. a) et c) : une réalisation du désordre, b) et d) : moyenne sur 80 réalisations. La flèche repère le front balistique. Sous chacun des B-Scans, on représente 40 μ s du signal temporel reçu sur le transducteur #64.

Ainsi, certains appellent parfois *onde cohérente* ce qui n'est en fait *que l'onde balistique* définie pour une réalisation du désordre. Cela étant, bien que ne travaillant que sur une réalisation, ils ont généralement déjà une bonne estimation de *l'onde cohérente* car ils intègrent généralement l'amplitude transmise sur un capteur grand devant la longueur d'onde [13].

Qualitativement, notre expérience présente l'avantage de mettre clairement en lumière cette distinction entre *onde balistique* et *onde cohérente*. Pour des épaisseurs « faibles », $L=10\text{mm}$ dans l'exemple des figures 8.a et 8.b, *l'onde balistique* « ressemble » à sa moyenne sur 80 réalisations. Intuitivement, on peut penser qu'il est légitime dans ce cas de confondre les deux. Pour des épaisseurs plus élevées, $L=30\text{mm}$ dans l'exemple des figures 8.c et 8.d, on éprouve plus de difficulté à distinguer *l'onde balistique*. En fait, sur chacune des voies du réseau, une première impulsion, parfois d'amplitude plus faible que les signaux suivants, arrive bien au temps de propagation dans l'eau. Mais son amplitude varie beaucoup d'un capteur à l'autre. Autrement dit, *l'onde balistique* existe mais n'est plus « automoyennante » comme elle peut l'être dans l'approximation de Born [14].

Définition d'un coefficient de transmission en amplitude en régime impulsionnel

Ces observations qualitatives sont confirmées quantitativement par les mesures des coefficients de transmission balistique et cohérent.

IL s'agit tout d'abord de définir un coefficient de transmission pour l'onde balistique. L'onde balistique $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est l'onde qui, générée par notre source en \mathbf{r}' et transmise à travers le milieu, est reçue, sans avoir été diffusée, en un point \mathbf{r} de l'espace, c'est-à-dire sur un capteur dont la taille est de l'ordre de la longueur d'onde.

Notons par ailleurs que si la théorie fondée sur l'utilisation de *l'équation de Dyson* (cf. paragraphe 3) est monochromatique, expérimentalement nos capteurs sont capables de suivre l'évolution du champ de pression en fonction du temps.

Finalement, nous définissons donc le coefficient de transmission de *l'onde balistique* pour le capteur #i par :

$$T_{A_i}(i) = A(i) / A_0(i) \quad (40)$$

où $A(i)$ est le maximum d'amplitude de la première impulsion enregistrée sur le capteur #i (cf. figure 9) et $A_0(i)$ le maximum d'amplitude de l'impulsion transmise dans l'eau et reçue sur ce même capteur.

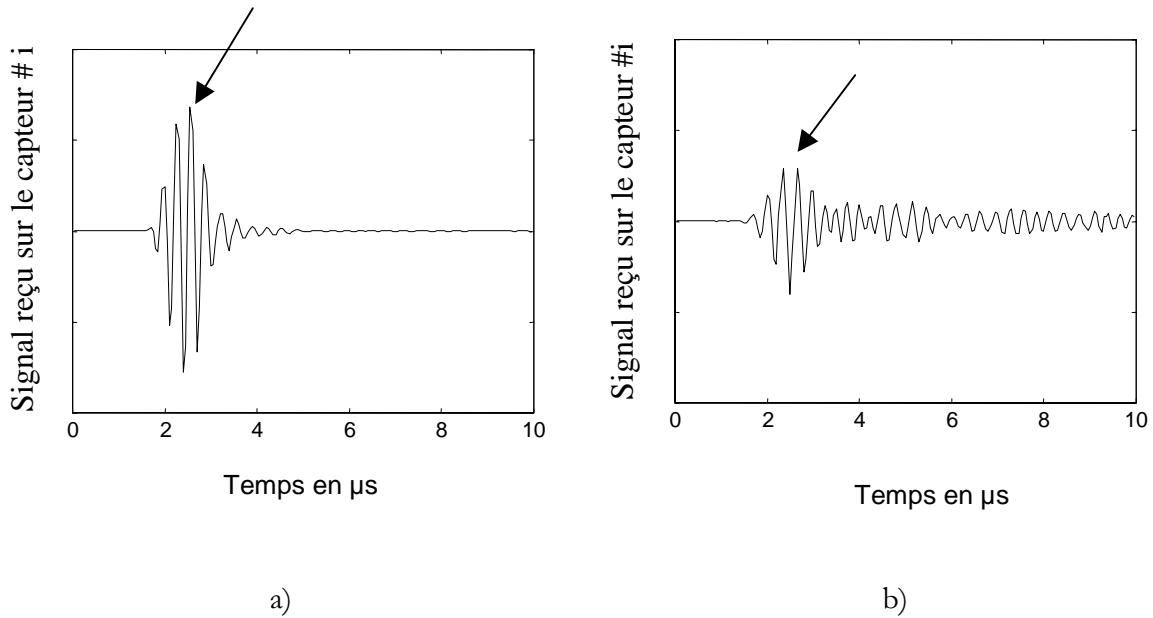


Fig. 9. définitions des amplitudes balistiques dans l'eau (a), à travers le milieu (ici pour $L=10mm$) (b).

Nous avons reporté sur la figure 10 les points (figurés par des disques) correspondant au coefficient de transmission ainsi défini et mesuré sur le capteur #64 pour plusieurs épaisseurs. Dans une échelle semi-logarithmique, ces points sont bien alignés jusqu'à une épaisseur de 15 mm. Au delà, la décroissance exponentielle de l'amplitude avec l'épaisseur (cf. théorie paragraphe 3) ne semble plus vérifiée.

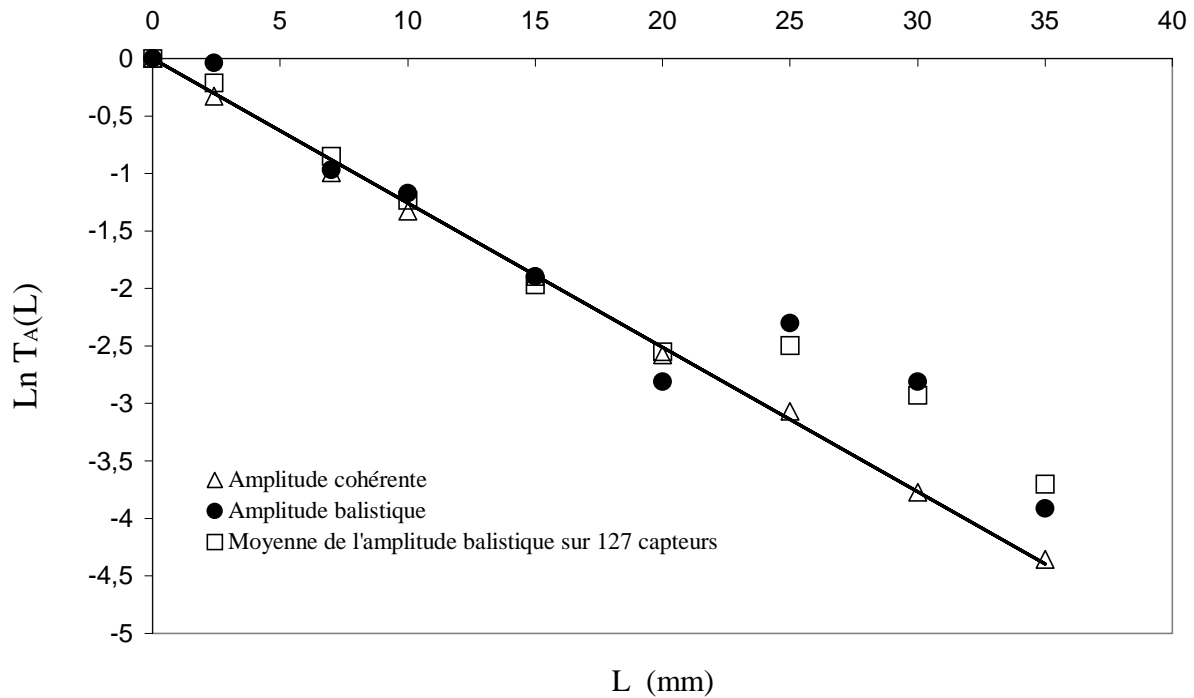


Fig. 10. Evolution de l'amplitude transmise en fonction de l'épaisseur.

Si l'on moyenne spatialement l'amplitude sur l'ensemble du front balistique, c'est-à-dire sur les 127 capteurs dont nous disposons, on peut définir un nouveau coefficient de transmission plus conforme aux expériences habituellement réalisées en acoustique dans lesquelles on intègre l'amplitude transmise sur un capteur de taille grande devant la longueur d'onde.

$$T_{A_2} = \frac{\sum_{i=1}^{127} A(i)}{\sum_{i=1}^{127} A_0(i)} \quad (41)$$

Nous obtenons alors des points (carrés sur la figure 10) qui s'alignent sensiblement mieux mais qui s'écartent tout de même de la tendance linéaire au delà de 20 mm.

Enfin, le coefficient de transmission de l'amplitude cohérente est expérimentalement défini par :

$$T_{A_3} = \frac{\sum_{i=1}^{127} \langle A(i) \rangle}{\sum_{i=1}^{127} \langle A_0(i) \rangle} = \langle T_{A_2} \rangle \quad (42)$$

où $\langle \rangle$ désigne la moyenne réalisée sur les 80 positions de l'ensemble source/réseau. Cette fois, les points correspondant s'alignent parfaitement sur une droite jusqu'à une épaisseur de 35 mm.

On voit donc là un premier danger de la confusion entre *onde balistique* et *onde cohérente*. Certains pourraient voir en effet dans une brisure de la pente de la courbe *transmission=f(épaisseur)* l'apparition d'un nouveau régime là où il s'agit sans doute simplement d'une statistique insuffisante.

La pente de la droite conduit à $l = 4mm$ pour le libre parcours moyen. A priori, le libre parcours moyen ainsi mesuré intègre à la fois l'effet de la diffusion et celui d'éventuels mécanismes d'absorption. Il est donc tel que :

$$1/l = 1/l_s + 1/l_a \quad (43)$$

où l_a est le libre parcours moyen d'absorption et l_s le libre parcours moyen élastique. Si l'on néglige en première approche l'absorption dans le milieu, on peut donc dire que la distance entre deux diffusions représente huit longueurs d'onde et 1.6 fois la distance moyenne entre deux diffuseurs.

Si l'on se fie à la littérature sur le sujet [1,2], au delà d'un ou de quelques libre parcours moyen élastiques, la majeure partie de l'énergie a été transférée aux ondes diffuses. On s'intéresse alors à la propagation de la partie incohérente de l'intensité. Pourtant, jusqu'à 35 mm, soit environ 9 libres parcours moyens, l'amplitude cohérente est encore mesurable, et surtout du même ordre de grandeur que l'amplitude des ondes diffuses. On distingue même encore des traces de l'onde cohérente jusqu'à 60 mm, soit 15 libres parcours moyens (cf. Fig. 11).

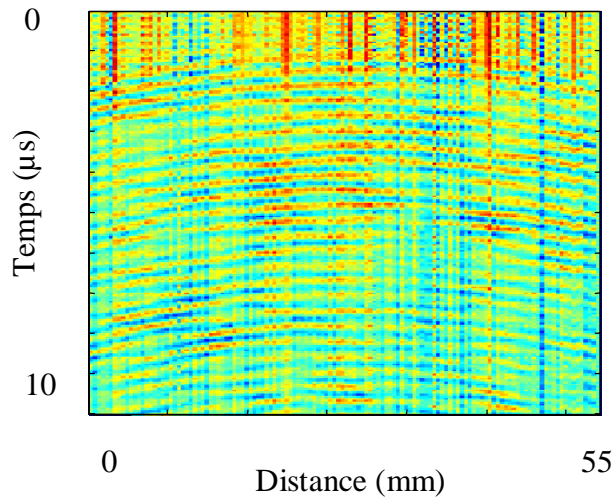


Fig. 11. Représentation B-Scan de la moyenne sur le désordre de l'amplitude transmise pour $L = 60\text{mm}$.

Il semblerait donc que le passage entre les deux modes de description que nous avons appelés « monde probabiliste en amplitude » et « monde probabiliste en intensité » soit moins net que ne le prévoit généralement la théorie. Nous reviendrons sur ce point dans le second chapitre.

« Diffusion vers l'avant »

Un deuxième danger réside dans la confusion *onde balistique/onde cohérente*. Nous avons montré dans le premier chapitre que seule résiste à la moyenne la partie de l'onde qui émerge du milieu avec le vecteur d'onde \mathbf{k}_0 incident. Dès lors, si l'*onde balistique* contribue en effet à l'*onde cohérente*, elle n'en est pas forcément l'unique composante, ce que l'on peut mettre en lumière dans une expérience dynamique comme la nôtre.

Expérimentalement, il apparaît en effet clairement derrière la contribution balistique à l'onde cohérente d'autres fronts, répliques décalées dans le temps du front balistique, que la moyenne sur le désordre fait ressortir (figures 8.b, 8.d et 11). Le premier d'entre eux arrive environ $1.7 \mu\text{s}$ après le front balistique. Ces fronts sont le signe que la cohérence est préservée pour des instants supérieurs au temps de propagation balistique. Ils trouvent leur origine dans la contribution des ondes diffusées vers l'avant (*forward scattering*) et retardées.

Ondes circonférentielles et résonances des diffuseurs

Le problème de la diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple est un problème loin d'être évident. Les études menées en régime impulsif le sont généralement dans le cadre de l'acoustique géométrique, i.e. pour des rapports $kR \gg 1$ [7]. Pour les fréquences plus faibles, le problème est traité numériquement en régime harmonique. Il en est ainsi par exemple de la formule donnant la pression diffusée par un cylindre plein que nous avons utilisée dans le paragraphe 2 pour évaluer la section efficace de diffusion d'une tige. Cette formule peut être établie en utilisant la théorie de la matrice S utilisée en physique nucléaire pour résoudre des problèmes de diffusions de particules.

Nous avons vu en particulier que la section efficace de diffusion d'une tige est assez fortement piquée vers l'avant autour de 3.2 MHz. Cette diffusion vers l'avant est liée à la propagation d'ondes de surface élastiques qui circulent à la périphérie de l'obstacle diffusant tout en ré-émettant dans le liquide au cours de leur propagation. Plus précisément, une paire d'ondes de surface est générée à des angles d'incidence vérifiant la loi de Descartes et ré-émettent dans le liquide, l'angle de ré-émission étant le symétrique de l'angle de génération par rapport à la normale locale (Fig. 12). Lorsque les deux ondes de la paire bouclent en phase, un système d'ondes stationnaires est créé, signe d'une résonance des tiges. Or, au voisinage de résonances, la propagation de ces ondes circonférentielles peut induire un effet retard sur la propagation. Ces ondes retardées et diffusées vers l'avant sont trop faibles pour être décelées sur un diffuseur unique mais la somme de leurs contributions peut ne plus être négligeable pour des milliers de diffuseurs. Lorsqu'on moyenne l'amplitude transmise sur le désordre, ces contributions peuvent expliquer les fronts observés.

Compte tenu de notre gamme de fréquences, deux résonances sont envisageables [7]. Une onde de Rayleigh généralisée d'ordre 2 à 3 MHz et une onde de galerie à échos d'ordre 1 à 3.5 MHz. A 3 MHz, ladite résonance se traduit par un creux dans la section efficace totale de diffusion (et non par un pic comme en optique). L'interprétation est la suivante. L'onde diffusée peut être décomposée comme la somme de deux termes, le premier relatif à la diffusion par un objet rigide (onde spéculaire, onde de Franz), le second lié aux résonances élastiques. En fonction de la valeur du déphasage existant entre ces deux contributions, la résonance peut se traduire par un pic ou un creux dans la section efficace totale de diffusion. A la résonance est associé un certain temps de séjour (appelé en optique « dwell time » dans l'étude de la diffusion multiple résonante). Il peut être

grossièrement évalué comme l'inverse de la résonance. Il vaut entre 1.5 et 2 μ s, durée susceptible d'expliquer l' écart temporel entre les différents fronts composant l'onde cohérente.

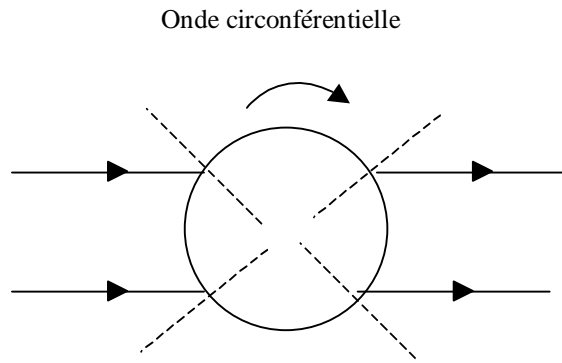


Fig. 12. Contribution des ondes diffusées vers l'avant à l'onde cohérente.

Analyse fréquentielle de l'onde cohérente

Une analyse fréquentielle des fronts composant l'onde cohérente semble confirmer l'hypothèse précédente (Fig. 13). Le spectre du premier front composant l'onde cohérente (résultant de la moyenne du balistique) est superposable au spectre de l'onde transmise dans l'eau. Par contre, le spectre des fronts cohérents arrivant à des temps supérieurs est décalé vers les basses fréquences et plus particulièrement autour de 2.7 MHz, valeur proche de la fréquence théorique de résonance.

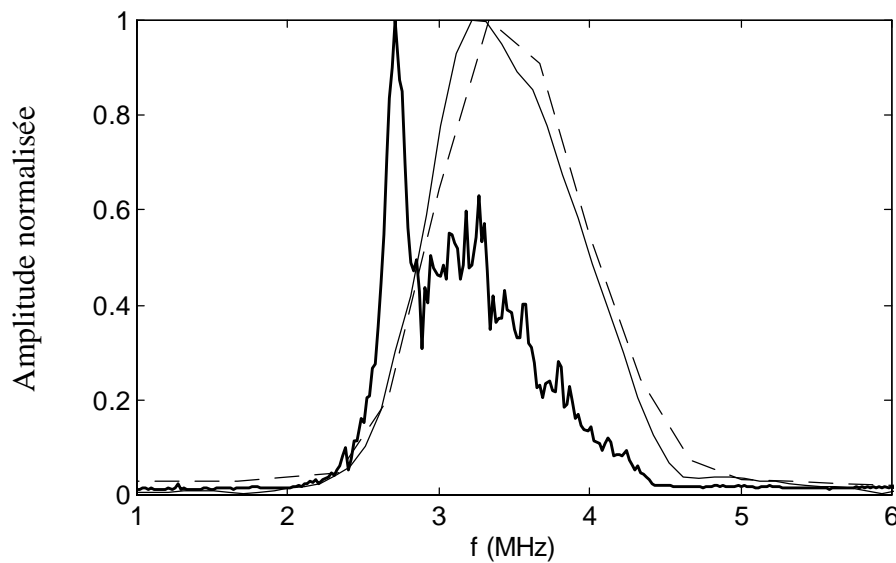


Fig. 13. Spectres des signaux moyens transmis à travers la forêt de tiges pour $L = 25\text{mm}$. Trait fin : spectre du signal reçu dans l'eau. Trait pointillé : spectre de la contribution balistique au cohérent. Trait épais : spectre des fronts diffusés vers l'avant.

Le décalage global du spectre est lié au fait qu'entre les deux limites du spectre de l'impulsion, la section efficace totale de diffusion croît avec la fréquence comme nous l'avons vu dans le premier chapitre. Qui plus est, autour de la fréquence de résonance à 3 MHz, la section efficace totale de diffusion est deux fois moindre qu'à 3.2 MHz, fréquence centrale du pulse d'émission (cf. courbe de la section efficace paragraphe 2). Par conséquent, le libre parcours moyen élastique de cette composante fréquentielle de l'impulsion doit être deux fois plus grand que celui de la fréquence centrale. Si on fait une analyse fréquentielle de nos signaux (cf. figure 14), on obtient effectivement un maximum dans le libre parcours moyen élastique pour la fréquence $f = 2.7\text{MHz}$, légèrement différente de la fréquence théorique. L'écart est aisément explicable par l'incertitude sur les paramètres élastiques de nos diffuseurs. Pour cette fréquence, le libre parcours moyen déterminé expérimentalement est deux fois plus grand que pour $f_c = 3.2\text{MHz}$. Par conséquent, en moyenne, cette composante est deux fois moins atténuée que la composante centrale, ce qui peut contribuer à expliquer l'enrichissement « basses fréquences » vers $f = 2.7\text{MHz}$ des ondes diffusées vers l'avant.

Finalement, l'onde moyenne transmise à travers le milieu multidiffuseur semble porter la trace du comportement individuel des diffuseurs.

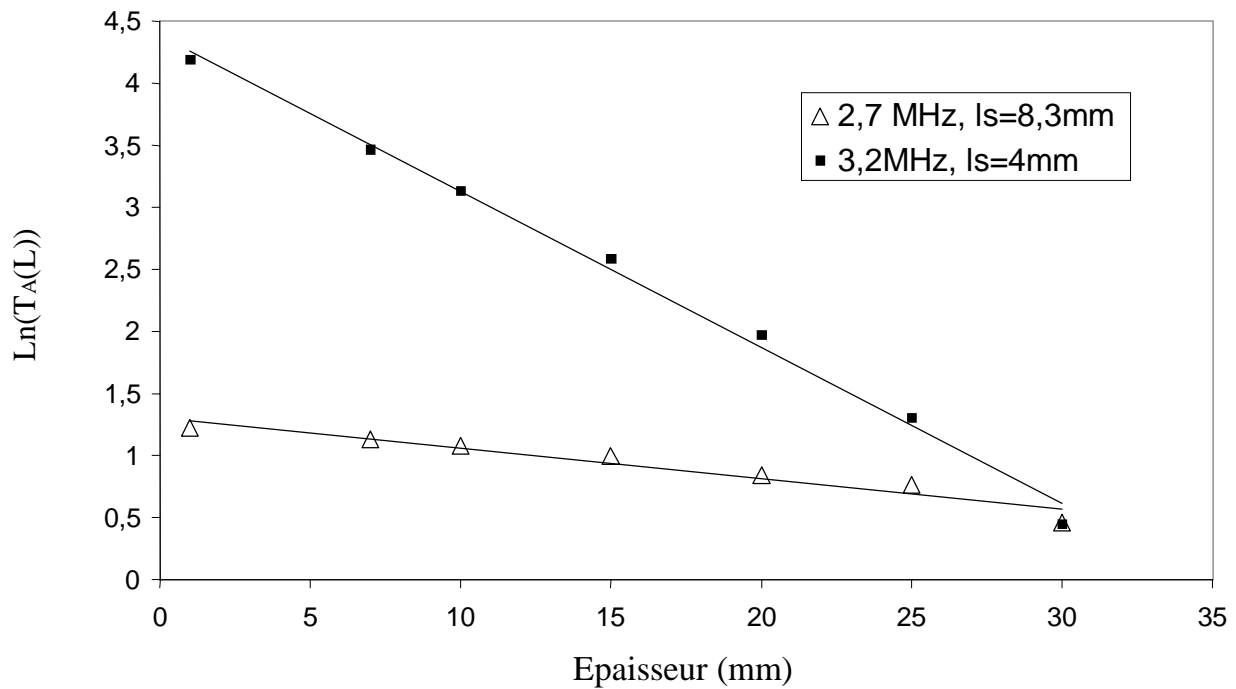


Fig. 14. Variation du coefficient de transmission de l'amplitude cohérente pour la fréquence centrale de l'impulsion et pour la composante à 2.7 MHz.

On vérifie en passant qu'il est légitime en régime impulsionnel de définir un libre parcours moyen pour la fréquence centrale de l'impulsion. L'analyse en fréquences de l'onde cohérente fournit en effet pour le libre parcours moyen à 3.2 MHz la même valeur que celle trouvée en utilisant la définition (42) du coefficient de transmission de l'onde cohérente en régime impulsionnel (table 1).

F (MHz)	2.5	2.7	3	3.2	3.5	4	4.5
l (mm)	5.1	8.3	4.6	4	3.5	3.6	3.1

Table 1 : Libres parcours moyens pour différentes composantes fréquentielles de l'impulsion émise

En conclusion, dans la pratique, l'expérimentateur qui se trouve dans l'impossibilité de réaliser une moyenne peut utiliser la décroissance du front balistique sur les premières épaisseurs pour déterminer le libre parcours moyen élastique, surtout si l'amplitude balistique est moyennée sur une taille de capteur grande devant la longueur d'onde. Mais il doit alors se méfier des points qui s'écartent de la droite de régression pour des épaisseurs plus élevées.

Plus fondamentalement, la confusion entre onde balistique et onde cohérente masque le fait que toutes deux relèvent de physiques différentes. En particulier, notre expérience dynamique a permis de mettre en lumière la double contribution de l'onde balistique et de l'onde diffusée vers l'avant à l'onde cohérente. La présence concomitante de ces deux contributions est originale. Habituellement, une seule des deux est considérée, soit qu'elle est effectivement la seule, soit qu'elle n'est pas discernable de l'autre.

Par exemple, dans les expériences où les obstacles sont des diffuseurs de Rayleigh, les deux contributions peuvent exister mais arrivent au même instant.

Autre exemple : on peut, dans une certaine mesure, utiliser le formalisme de la diffusion multiple pour traiter le problème de la propagation d'une onde ultrasonore dans des matériaux granulaires [12,13]. Il ne s'agit plus alors d'un milieu homogène de base dans lequel sont inclus des diffuseurs comme dans notre cas. L'onde balistique, au sens de l'onde qui n'a pas été diffusée, n'a alors plus véritablement de sens. Le premier écho enregistré à travers un tel milieu est lié à la propagation à travers les contacts de Hertz. Avec notre vocabulaire, on parlera donc plutôt de diffusion vers l'avant. C'est cette partie de l'onde qui résiste à la moyenne sur le désordre et qui est donc à l'origine de l'onde cohérente.

Finalement, nous avons vu que la cohérence subsiste pour des épaisseurs de l'échantillon bien supérieures à un libre parcours moyen élastique. Dans le prochain chapitre, nous allons voir que les mesures d'intensité transmises confirment l'existence d'une large plage de transition entre un « régime » bien décrit par la propagation de l'onde cohérente et un « régime » purement diffusif.

REFERENCES

- ¹ D. Sornette, “Acoustic Waves in Random Media, I. Weak Disorder regime”, *Acustica*, **67** (1989).
- ² Ping Sheng, “Introduction to Wave Scattering, Localization, and Mesoscopic phenomena”, Academic Press, 1995.
- ³ Akira Ishimaru, “Wave Propagation and Scattering in Random Media”, Vol. I et II, Academic Press, New York, 1978.
- ⁴ Lev A. Chernov, “Wave Propagation in a Random Medium, McGraw-Hill Book Company”, 1960.
- ⁵ Stefan Catheline, “Interférométrie speckle ultrasonore: application à la mesure d'élasticité”, Thèse de doctorat, Université Paris VII, novembre 1998.
- ⁶ Véronique Miette, “Retournement temporel des ondes ultrasonores. Contrôle Non destructif des billettes de titane”, Thèse de doctorat, Université Paris VI, mars 1998.
- ⁷ N. GESPA, “La diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple”, Cedocar.
- ⁸ G. D. Mahan, “Many-Particle Physics”, Plenum, New York, 1981.
- ⁹ U. Frisch, “Probabilistic methods in applied mathematics, Vols I and II, edited by A.T. Bharucha-Reid”, Academic Press, New York, 1968.
- ¹⁰ A. Lagendijk and B.A. van Tiggelen, *Phys. Rep.*, **270**, 143 (1996).
- ¹¹ E. Akkermans, P. E. Wolf, R. Maynard and G. Maret, *J. Phys.***49**, 77 (1988).
- ¹² POAN research Group (Ed.), “New aspects of electromagnetic and acoustic wave diffusion”, Springer tracts in Modern Physics, Vol. 144, Springer, 1998
- ¹³ X. Jia, C. Caroli and B. Velicky, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1863 (1999).
- ¹⁴ Lecture notes to a course given by B. Velicky (Charles University Praha), G.P.S. Jussieu, Universités Paris VII et Paris VI, January 1999.

Chapitre II

La diffusion multiple en acoustique / Propagation incohérente de l'intensité

Au delà d'un ou quelques libres parcours moyens, *l'onde cohérente* s'est éteinte. Dans ce chapitre, nous nous intéressons donc à la propagation de l'intensité moyenne en nous attachant à donner une base microscopique à l'équation de la diffusion généralement utilisée pour la décrire. A cette fin, nous allons montrer que l'intensité moyenne obéit à l'équation de *Bethe-Salpeter* qui est l'analogie d'une *équation de transport* pour une particule. Dans l'approximation de Boltzmann, nous verrons qu'elle mène à l'équation du *transfert radiatif* à laquelle obéit l'intensité spécifique dans le milieu. Sa résolution dans l'approximation de la diffusion conduit à l'introduction de deux nouveaux paramètres le libre parcours moyen de transport l^* et la constante de diffusion D . En particulier, nous déterminerons la forme analytique de l'intensité instantanée moyenne transmise dans un milieu sans absorption, ce que l'on appelle souvent *la courbe de distribution des temps de vol*. Expérimentalement, nous tenterons de l'utiliser pour déterminer la constante de diffusion de notre échantillon multidiffuseur prototype. Dans la pratique, nous verrons qu'il est en fait indispensable de tenir compte de l'absorption dans le milieu. Nous montrerons alors que la connaissance a priori de la constante de diffusion, dont nous verrons une autre méthode de mesure dans le troisième chapitre, permet d'accéder au libre parcours moyen d'absorption introduit dans le précédent chapitre. Par suite, il sera possible de faire la part respective de la diffusion et de l'absorption dans l'atténuation observée sur notre échantillon.

1. Le monde probabiliste en intensité

1.1. L'équation de Bethe Salpeter

Nous allons donc nous intéresser aux moments d'ordre 2 de la fonction de Green, solution de l'équation de propagation en milieu hétérogène. C'est-à-dire que nous cherchons à calculer la quantité $\langle G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0') G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle$ qui n'est autre que l'autocorrélation spatiale du champ. En particulier, l'intensité $\langle I(\mathbf{r}) \rangle$ sera donnée par $\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle$. Nous avons donc à multiplier la fonction de Green par sa conjuguée et à prendre la moyenne sur le désordre du produit. Rappelons à ce stade qu'il existe une correspondance parfaite entre écritures intégrales, matricielles et diagrammatiques. Par rapport à l'écriture intégrale, l'écriture matricielle présente le double avantage d'être plus concise et surtout d'être formellement identique dans l'espace réel et dans l'espace des \mathbf{k} . Ce que nous pourrons montrer dans un espace sera donc valable dans l'autre. Dès lors, l'écriture matricielle constituera notre point de départ. Nous définirons la matrice \mathbf{T} relativement au *milieu effectif*. L'intérêt est que $\langle T_e \rangle$, sa moyenne sur le désordre, est nulle.

Nous avons donc à multiplier :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_e + \mathbf{G}_e \mathbf{T}_e \mathbf{G}_e$$

et

$$\mathbf{G}^* = \mathbf{G}_e^* + \mathbf{G}_e^* \mathbf{T}_e^* \mathbf{G}_e^*$$

Par multiplication, on entend ici multiplication terme à terme de la matrice \mathbf{G} par la matrice \mathbf{G}^* définie par $(\mathbf{G} \otimes \mathbf{G}^*)_{i,j} = \mathbf{G}_{i,j} \mathbf{G}_{i,j}^*$, ce qui fournit une matrice de même dimension que les deux matrices multipliées. Notons que si nous cherchons à calculer l'autocorrélation, nous avons à multiplier chacun des termes de la première matrice par chacun des termes de la seconde, c'est-à-dire que nous obtenons cette fois un tenseur de rang 4: $(\mathbf{G} \otimes \mathbf{G}^*)_{i,j,k,l} = \mathbf{G}_{i,j} \mathbf{G}_{k,l}^*$. Dans le formalisme que nous utilisons, il n'est pas plus compliqué de calculer l'autocorrélation. C'est donc à elle que nous nous intéressons :

$$\langle \mathbf{G} \otimes \mathbf{G}^* \rangle = \langle \mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_e^* \rangle + \langle \mathbf{G}_e \mathbf{T}_e \mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_e^* \mathbf{T}_e^* \mathbf{G}_e^* \rangle \quad (1)$$

Les termes croisés ont disparu puisque $\langle \mathbf{T}_e \rangle = 0$. On peut réorganiser les termes différemment :

$$\begin{aligned} (\mathbf{G} \otimes \mathbf{G}^*)_{i,l,m,q} &= \mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_e^* + \sum_{j,k,n,p} (\mathbf{G}_e)_{i,j} (\mathbf{T}_e)_{j,k} (\mathbf{G}_e)_{k,l} (\mathbf{G}_e^*)_{m,n} (\mathbf{T}_e^*)_{n,p} (\mathbf{G}_e^*)_{p,q} \\ &= \mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_e^* + \sum_{j,k,n,p} (\mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_e)_{i,q,j,p} (\mathbf{T}_e \otimes \mathbf{T}_e^*)_{j,p,k,n} (\mathbf{G}_e^* \otimes \mathbf{G}_e^*)_{m,q,n,p} \end{aligned}$$

soit,

$$\langle \mathbf{G} \otimes \mathbf{G}^* \rangle = \mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_e^* + (\mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_e) \Gamma (\mathbf{G}_e^* \otimes \mathbf{G}_e^*) \quad (2)$$

L'opérateur $\Gamma = \langle \mathbf{T}_e \otimes \mathbf{T}_e^* \rangle$ à quatre entrées s'appelle le *vertex réductible*, terme que nous justifierons dans la suite de l'exposé. Il contient toute l'information sur la diffusion multiple et est l'analogue de la moyenne sur le désordre de la matrice \mathbf{T} pour l'amplitude. Sous forme intégrale, cette équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_0) \rangle &= \\ \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_0) \rangle & \\ + \iiint \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_2) \rangle \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \langle G(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_0) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}'_0) \rangle d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 & \end{aligned} \quad (3)$$

Par analogie avec la définition de l'énergie propre pour l'amplitude, on définit un nouveau *vertex* U , appelé *vertex irréductible*, tel que :

$$\langle \mathbf{G} \otimes \mathbf{G}^* \rangle = \mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_e^* + (\mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_e) U \langle \mathbf{G}^* \otimes \mathbf{G}^* \rangle \quad (4)$$

Compte tenu du nombre de termes mis en jeu dans le calcul de l'autocorrélation du champ, le formalisme matriciel demeure trop lourd. Dans le même esprit que précédemment, nous allons donc procéder au calcul dans l'espace des diagrammes.

Le développement de \mathbf{G} s'écrit en fonction de la matrice \mathbf{t}_e :

$$\mathbf{G} = \text{—} + \text{—}\times\text{—} + \text{—}\times\times\text{—} + \text{—}\times\times\times\text{—} + \dots$$

On écrira le conjugué de \mathbf{G} :

$$\mathbf{G}^* = \text{—}| + \text{—}\times| + \text{—}\times\times| + \text{—}\times\times\times| + \dots$$

Le propagateur moyen $\mathbf{G}_e = \langle \mathbf{G} \rangle$ est figuré par un trait gras.

Il faut donc multiplier ces deux équations et prendre la moyenne. Dans l'opération de multiplication terme à terme, par convention, les éléments de la première équation sont placés en haut, les éléments de la seconde équation en bas. Par exemple, la moyenne du produit des troisièmes termes s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \times \times \text{---} \\ \text{---} + \times + \times + \text{---} \end{array} \right\rangle \left\langle \sum_i \sum_{i \neq j} \mathbf{G}_e \mathbf{t}_i \mathbf{G}_e \mathbf{t}_j \mathbf{G}_e \otimes \sum_k \sum_{l \neq k} \mathbf{G}_e^* \mathbf{t}_k^* \mathbf{G}_e^* \mathbf{t}_l^* \mathbf{G}_e^* \right\rangle \\
 = & \begin{array}{c} \text{---} \times \times \text{---} \\ \text{---} + \times + \times + \text{---} \end{array} \left\langle \sum_i \sum_{i \neq j} \mathbf{G}_e \mathbf{t}_i \mathbf{G}_e \mathbf{t}_j \mathbf{G}_e \otimes \sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j \\ l \neq k \\ l \neq i}} \mathbf{G}_e^* \mathbf{t}_k^* \mathbf{G}_e^* \mathbf{t}_l^* \mathbf{G}_e^* \right\rangle \\
 + & \begin{array}{c} \times \quad \times \\ | \quad | \\ \text{---} \times \times \text{---} \\ \text{---} + \times + \times + \text{---} \end{array} \left\langle \sum_i \sum_{i \neq j} \mathbf{G}_e \mathbf{t}_i \mathbf{G}_e \mathbf{t}_j \mathbf{G}_e \otimes \sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j \\ l = j \\ l \neq i}} \mathbf{G}_e^* \mathbf{t}_k^* \mathbf{G}_e^* \mathbf{t}_l^* \mathbf{G}_e^* \right\rangle \\
 + & \begin{array}{c} \times \quad \times \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \times \times \text{---} \\ \text{---} + \times + \times + \text{---} \end{array} \left\langle \sum_i \sum_{i \neq j} \mathbf{G}_e \mathbf{t}_i \mathbf{G}_e \mathbf{t}_j \mathbf{G}_e \otimes \sum_{\substack{k \neq i \\ k = j \\ l = i \\ l \neq j}} \mathbf{G}_e^* \mathbf{t}_k^* \mathbf{G}_e^* \mathbf{t}_l^* \mathbf{G}_e^* \right\rangle
 \end{aligned}$$

Comme dans le paragraphe précédent, les lignes pointillées rejoignent des diffuseurs identiques. L'interprétation de chacun des trois termes est la suivante (Fig. 1) : chaque diagramme symbolise un couple de chemins, le premier chemin étant relatif à une amplitude, le second à sa conjuguée. Le premier diagramme représente deux chemins qui n'ont en commun aucun diffuseur. Le second représente deux chemins qui empruntent la même séquence de diffuseurs. Le troisième symbolise deux chemins qui passent par les mêmes diffuseurs mais dans une chronologie inverse.

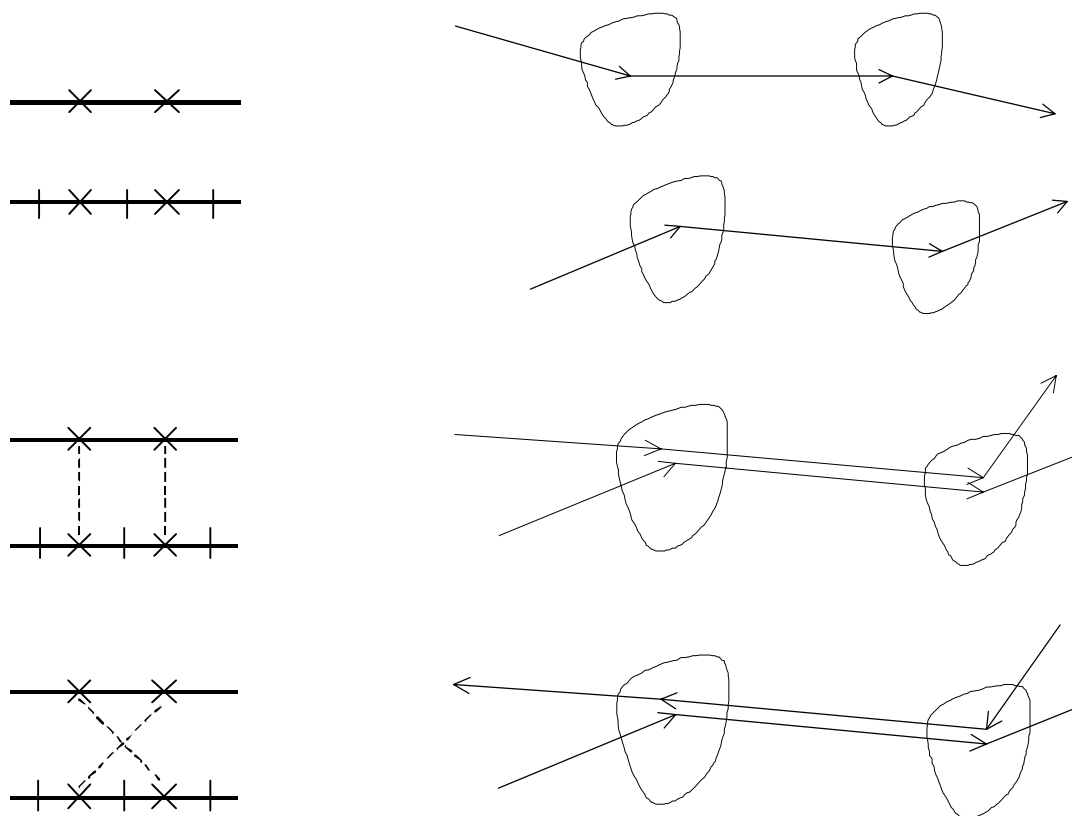
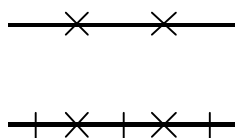


Fig. 1. Interprétation des diagrammes d'intensité

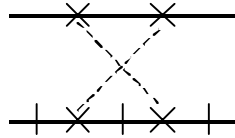
Comme dans le premier chapitre, nous allons grouper les diagrammes en fonction de leurs propriétés de connexité, ce qui permet d'éviter de lourdes manipulations calculatoires. On peut distinguer plusieurs types de diagramme.

Les diagrammes non connectés sont ceux qui correspondent à des couples de chemins n'ayant aucun diffuseur en commun. C'est le cas par exemple du premier diagramme du développement précédent :

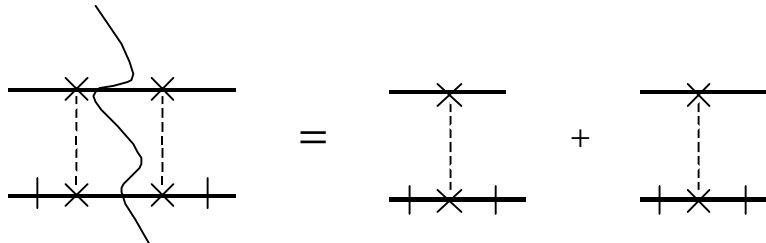


Ces diagrammes contribuent au produit $\langle \mathbf{G} \rangle \otimes \langle \mathbf{G}^* \rangle$.

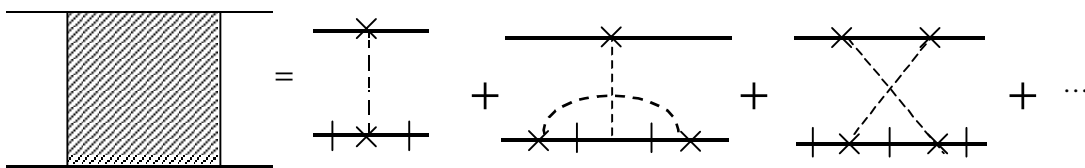
Sont dits fortement connectés les diagrammes pour lesquels il est impossible de couper une ligne représentant \mathbf{G}_e et retrouver deux diagrammes indépendants contenant au moins deux diffuseurs. C'est l'exemple du troisième diagramme dans le développement précédent.



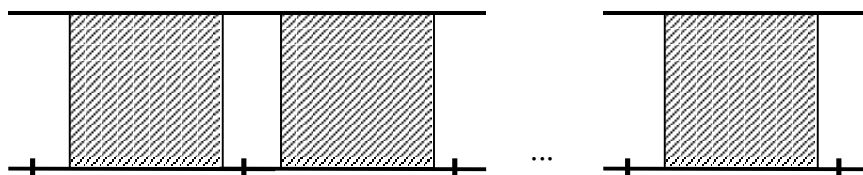
Les autres diagrammes sont dits faiblement connectés. Par exemple, dans le développement précédent, le deuxième diagramme est réductible en deux diagrammes plus simples :



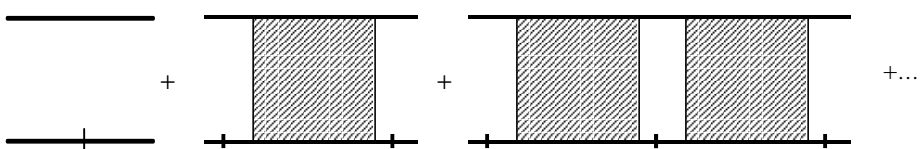
Il s'agit maintenant de regrouper les diagrammes en fonction de leurs propriétés topologiques. Tous les diagrammes qui contiennent un seul diagramme fortement connecté possèdent quatre branches \mathbf{G}_e et sont de la forme :



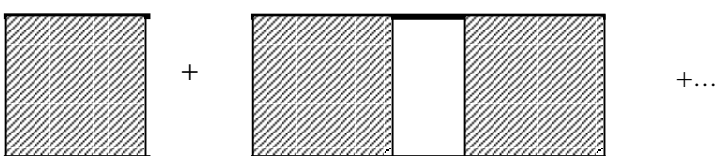
Plus généralement, la somme des diagrammes faiblement connectés qui contiennent N diagrammes fortement connectés prend la forme:



Finalement, l'autocorrélation $\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_0) \rangle$ s'écrit donc sous forme symbolique :

$$\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_0) \rangle =$$


En posant :

$$\Gamma \equiv$$


on retrouve l'équation la forme symbolique de l'équation :

$$\begin{aligned} \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_0) \rangle &= \\ \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_0) \rangle &+ \\ + \iiint \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2) \rangle \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \langle G(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_0) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}'_0) \rangle & d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \end{aligned}$$

En posant :

$$U \equiv \begin{array}{c} \text{[Hatched Square]} \\ \text{[Diagram 1: Vertical dashed line with 'x' at ends]} \\ \text{[Diagram 2: Dashed line with 'x' at ends, horizontal solid line below, dashed arc above]} \\ \text{[Diagram 3: Dashed line with 'x' at ends, horizontal solid line below, dashed lines forming a triangle above]} \\ \dots \end{array} = \text{[Diagram 1]} + \text{[Diagram 2]} + \text{[Diagram 3]} + \dots \quad (5)$$

il est facile de vérifier que ce développement peut également s'écrire :

$$\begin{aligned} \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_0) \rangle = & \quad (6) \\ \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_0) \rangle & \\ + \int \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'_2) \rangle U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \langle G(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_0) G^*(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}'_0) \rangle & d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \end{aligned}$$

On a donc identifié les diagrammes composant le vertex U : il s'agit de la somme de tous les diagrammes fortement connectés, d'où le nom de *vertex irréductible* qui se trouve à présent justifié. Nous allons voir à présent comment une approximation de milieu dilué analogue à celle qui nous a permis de calculer l'énergie propre peut fournir une expression simple pour le vertex irréductible.

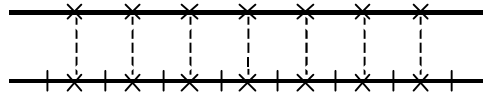
1.2. L'approximation des diagrammes de *ladder*

A ce stade, nous disposons pour l'autocorrélation spatiale du champ d'une équation exacte, l'équation de *Bethe Salpeter*. Dans la pratique, il est nécessaire de s'autoriser quelques approximations afin de pouvoir donner une expression analytique du *vertex irréductible*. Dans une approximation de milieu dilué analogue à celle utilisée pour le calcul de la *self-energy*, il est possible d'écrire au premier ordre en n , concentration en diffuseurs [1] :

$$U_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}^{(1)} = n \mathbf{t}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \mathbf{t}_{\mathbf{k}\mathbf{k}}^* \quad (7)$$

ce qui revient dans l'expansion diagrammatique (5) à ne retenir que le premier terme.

Le vertex réductible Γ ne contient alors plus que des diagrammes du type suivant :



Ces diagrammes sont appelés diagrammes de *ladder* (diagrammes en échelles) à cause de leur ressemblance avec une échelle. Dans les deux prochains paragraphes, nous allons voir comment cette approximation conduit à l'équation du *transfert radiatif*.

1.3. Equation de transport / Equation du transfert radiatif

Afin de ne laisser aucune zone d'ombre, comme c'est parfois le cas dans la littérature afférente au sujet, nous allons décrire les étapes qui permettent de déduire de l'équation de *Bethe Salpeter* l'équation phénoménologique du *transfert radiatif* [2] utilisée depuis Chandrasekhar pour décrire la diffusion de la lumière dans l'espace interstellaire [3]. Pour cela, nous nous inspirons très largement d'un *Physics Report* [1] qui constitue sans doute l'une des meilleures références sur le sujet.

A ce stade, contrairement au cas précédent du calcul de l'amplitude moyenne, nous n'avons pas encore une théorie utilisable dans la pratique pour décrire la propagation de la fonction de cohérence, en particulier la propagation de l'intensité, dans le milieu. Pour ce qui concerne l'amplitude moyenne, c'est le théorème optique qui nous a permis in fine de la calculer. En effet, son utilisation a permis de relier la matrice de diffusion d'une particule (et donc *l'énergie propre* dans une approximation de milieu dilué) à sa section efficace qui est mesurable expérimentalement et même calculable dans les cas simples.

A présent, il nous faut donc une relation analogue liant cette fois *l'énergie propre*, le *vertex irréductible* et la fonction de Green moyenne. Il est légitime de penser qu'une telle relation existe. En effet, la perte d'énergie, décrite par l'énergie propre Σ , de l'onde cohérente $\langle G \rangle$ au cours de sa propagation alimente les ondes diffuses dont la propagation est décrite par le vertex irréductible U . Il doit donc exister une relation de conservation entre Σ , U et $\langle G \rangle$. En théorie des champs, une telle équation est appelée *identité de Ward*.

Plus précisément, dans une première étape, on peut montrer que l'équation de *Bethe Salpeter* peut s'interpréter comme une *équation de transport* à laquelle obéit *l'intensité spécifique moyenne* dans le

milieu. L'intégration sur tous les \mathbf{k} de cette équation conduit effectivement, dans le cas stationnaire, à une *identité de Ward* [1].

Dans une seconde étape, on peut la réécrire dans l'approximation de Boltzmann, ce qui conduit à *l'équation du transfert radiatif*.

1.3.1. Equation de transport

On s'intéresse à la propagation d'une impulsion d'intensité dans un milieu désordonné. On caractérise celle-ci d'une part par la fréquence ω et le vecteur d'onde \mathbf{k} relatifs aux oscillations internes de la porteuse, d'autre part par la fréquence Ω et le vecteur d'onde \mathbf{q} relatifs à son enveloppe.

Après quelques manipulations (cf. annexe 1), l'équation de *Bethe Salpeter* s'écrit :

$$\left[\frac{i\omega\Omega}{c_0^2} - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q} + \Delta\Sigma_{\omega,\mathbf{k}}(\Omega, \mathbf{q}) \right] \phi_{\omega,\mathbf{k}}(\Omega, \mathbf{q}) = \Delta G_{\omega,\mathbf{k}}(\Omega, \mathbf{q}) \left[1 + \sum_{\mathbf{k}'} U_{\omega,\mathbf{k},\mathbf{k}'}(\Omega, \mathbf{q}) \phi_{\omega,\mathbf{k}'}(\Omega, \mathbf{q}) \right] \quad (8)$$

où l'on a introduit :

$$\Lambda\Sigma_{\omega\mathbf{k}}(\Omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{2i} \{ \Sigma(\omega + \Omega/2 + i\varepsilon/2, \mathbf{k} + \mathbf{q}/2) - \Sigma(\omega - \Omega/2 + i\varepsilon/2, \mathbf{p} - \mathbf{q}/2) \}$$

$$\Lambda G_{\omega\mathbf{k}}(\Omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{2i} \{ G(\omega + \Omega/2 + i\varepsilon/2, \mathbf{k} + \mathbf{q}/2) - G(\omega - \Omega/2 - i\varepsilon/2, \mathbf{p} - \mathbf{q}/2) \}$$

A des constantes numériques près, $\phi_{\omega,\mathbf{k}}$ est la définition microscopique de l'intensité spécifique dans le milieu, c'est-à-dire la densité de puissance diffusée dans la direction \mathbf{k} . c_0 est la vitesse de phase dans le milieu homogène de base (qui sera généralement l'eau pour nous).

Analysons cette équation dans le détail. Le terme $i\Omega$ dans le membre de droite agit comme une dérivée temporelle. Le second terme correspond à un gradient. Le troisième terme est relié à la décroissance de l'amplitude cohérente. Le premier terme du membre de droite est un terme source tandis que le second représente la contribution des ondes diffusées depuis un vecteur \mathbf{k}' vers le vecteur \mathbf{k} incident.

Finalement en coordonnées temps/espace, cette équation prend la forme :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \text{pertes} \right] I_{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) = \text{sources} + \text{diffusion} \quad (9)$$

On reconnaît l'équation de transport pour une particule de vitesse \mathbf{v} . A ce stade, aucune approximation n'a encore été faite. Nous avons seulement montré que l'équation de *Bethe Salpeter* peut s'interpréter comme une équation de transport.

1.3.2. Equation du transfert radiatif

L'équation de transport que nous venons d'introduire ne peut être résolue telle quelle. Comme pour le calcul de l'amplitude moyenne, nous utilisons une approximation au premier ordre en densité de diffuseurs. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \Sigma^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) &= n \mathbf{t}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}} \quad (10) \\ U^{(1)} &= n \mathbf{t}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} (\omega + \Omega/2 + i\varepsilon) \mathbf{t}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^* (\omega - \Omega/2 - i\varepsilon) \end{aligned}$$

Notons que l'identité de Ward que nous avons évoquée précédemment oblige à prendre pour le *vertex irréductible* et *l'énergie propre* le même degré d'approximation.

Dans cette approximation, on peut montrer que l'intensité spécifique $I_{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$, c'est à dire la densité de puissance au point \mathbf{r} diffusée dans l'angle solide unité autour de la direction donnée par le vecteur unitaire $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|}$, obéit à l'équation du transfert radiatif [1].

$$\frac{1}{V_p} \frac{\partial I_{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla I_{\mathbf{u}} = -\frac{1}{l_s} I_{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) + n \int d\Omega_{\mathbf{u}'} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}) I_{\mathbf{u}'}(\mathbf{r}, t) + \text{source} \quad (11)$$

V_p est la vitesse de phase du milieu effectif, $d\Omega_{\mathbf{u}}$ est l'angle solide élémentaire autour de la direction \mathbf{u}' . On reconnaît sous l'intégrale la section efficace différentielle de diffusion de la direction \mathbf{u}' vers la direction \mathbf{u} .

Le membre de gauche représente les variations dans le temps et dans l'espace de l'intensité le long de la direction \mathbf{u} . Le premier terme dans le membre de droite mesure la perte d'énergie dans la direction incidente due aux diffusions dans les autres directions. Le second terme représente le gain d'énergie dans la direction incidente liée à des diffusions de la direction \mathbf{u}' vers la direction incidente \mathbf{u} . Le dernier terme regroupe les éventuelles sources dans le milieu.

Nous avons donc donné à l'équation du transfert radiatif une base microscopique. En fait, cette équation n'est exacte que pour l'électron et utilisable pour les ondes lorsqu'on se trouve loin du régime de diffusion multiple résonnant [1].

Rigoureusement, l'équation du transfert radiatif ne découle en effet de l'équation de transport par l'utilisation de l'identité de Ward que dans le cas stationnaire ($\Omega = 0$). L'ajout du terme dépendant du temps conduit à l'équation du transfert radiatif que nous avons écrite plus haut mais celle-ci s'avère fautive dans les régimes où de l'énergie peut être piégée dans les diffuseurs. Cela étant, Lagendijk et al. [1] ont montré qu'une correction astucieuse de l'expression donnant la densité d'énergie dans le milieu, correction tenant compte de l'énergie piégée dans les diffuseurs, permet de déduire directement de l'équation de transport, c'est-à-dire sans passage par *l'équation du transfert radiatif*, l'équation de la diffusion que nous cherchons à établir.

Dans les cas pratiques qui nous intéressent, nous sommes loin de tels régimes où l'équation de transfert radiatif est en défaut. En particulier, nous verrons dans le chapitre 3 que vitesse de phase dans l'eau et *vitesse de transport* dans notre milieu multidiffuseur sont voisines.

Quoi qu'il en soit, l'équation du transfert radiatif ne peut être résolue que numériquement et nous lui préférons l'équation qui en découle dans « l'approximation de la diffusion ».

1.4. L'approximation de la diffusion

1.4.1. L'équation de la diffusion en milieu infini.

A ce stade, nous introduisons deux nouvelles quantités :

- le « vecteur courant » défini comme l'intégrale sur tout l'angle solide de l'intensité spécifique :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} I_{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) \mathbf{u} d\Omega \quad (12)$$

$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} dS$ représente au point \mathbf{r} le flux d'énergie à travers la surface dS de vecteur normal \mathbf{n} .

- la densité locale d'énergie $W(\mathbf{r}, t)$:

$$W(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{V_p} \int_{4\pi} I_{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) d\Omega \quad (13)$$

Après un grand nombre de diffusions, on s'attend à ce que la répartition de l'intensité dans le milieu soit globalement isotrope. L'idée est donc d'écrire l'intensité spécifique comme la somme de deux termes : le premier est sa moyenne angulaire, c'est à dire à un facteur multiplicatif près la densité locale d'énergie $W(\mathbf{r}, t)$, le second mesure l'écart à l'isotropie parfaite :

$$I_{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \frac{W(\mathbf{r}, t) V_p}{16\pi} + \frac{3\mathbf{u}}{16\pi} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (14)$$

Si l'on remplace dans l'équation du transfert radiatif l'intensité spécifique par (14) et que l'on intègre sur tout l'angle solide, on obtient pour un point source en $\mathbf{r} = 0$, à l'instant $t=0$, une équation de conservation pour la densité locale d'énergie.

$$\nabla \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial W(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \delta(\mathbf{r}) \delta(t) \quad (15)$$

De même, si l'on remplace dans l'équation du transfert radiatif l'intensité spécifique par (14) et que l'on applique l'opérateur $\int_{4\pi} (\cdot) \mathbf{u} d\Omega$, on retrouve l'équation de *Fick* bien connue.

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\frac{V_E l^*}{d} \nabla W(\mathbf{r}, t) \quad (16)$$

d est la dimension de l'espace. Deux nouveaux paramètres apparaissent dans cette équation.

$$1) \ l^* = \frac{l_s}{1 - \int \cos(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} = \frac{l_s}{1 - \cos\theta}$$

défini le libre parcours moyen de transport. Le pas caractéristique de la diffusion n'est donc pas égal au libre parcours moyen élastique. Ces deux quantités peuvent même différer d'un ordre de grandeur si le cosinus moyen est proche de 1. Tout dépend en fait du caractère plus ou moins anisotrope de la diffusion par un diffuseur. Pour des diffuseurs ponctuels, en régime de Rayleigh, le cosinus moyen tend vers 0 et les deux libres parcours moyens sont identiques.

Plus profondément, ce n'est pas la même physique qui se cache derrière ces deux quantités. *Le libre parcours moyen de transport* n'est pas à proprement parler une échelle caractéristique comme le *libre parcours moyen élastique* qui donne, comme nous l'avons vu, la distance caractéristique de décroissance de l'amplitude cohérente. C'est toute la différence entre les mondes probabilistes en amplitude et en intensité. Simplement, on peut dire que l^* représente la distance au bout de laquelle l'onde a « perdu la mémoire de sa direction initiale » [4].

2) V_E est la vitesse de transport définie, pour une fréquence donnée, comme le rapport du module du vecteur courant à la densité locale d'énergie, soit $V_E = \frac{J(\omega)}{W(\omega)}$. Dans le cas général, la vitesse de transport de l'énergie dans le milieu n'est ni la vitesse de groupe ni la vitesse de phase. En particulier, dans le cas de diffuseurs résonnants que l'onde « visite » pendant un certain temps (*dwell time*), la vitesse de transport peut différer très fortement des vitesses de phases et de groupe [5]. Dans l'approximation de Boltzmann, Lagendijk et al. ont montré, en tenant compte de $\delta^{(1)}$, densité d'énergie piégée dans les diffuseurs normalisée par rapport à la densité d'énergie à l'extérieur, que

$V_E = \frac{c_0^2}{V_p} \cdot \frac{1}{1 + \delta^{(1)}}$. Nous verrons que pour nos échantillons la vitesse de phase V_p dans le milieu moyen est peu différente de c_0 vitesse de phase dans l'eau. Par conséquent, la vitesse de transport diffère peu de la vitesse de phase dans l'eau. En acoustique, des expériences semblant mettre en lumière la différence existant entre vitesses de phase, de transport et de groupe ont été menées ces dernières années [6].

La combinaison des équations (15) et (16) conduit à l'équation de la diffusion pour la densité locale d'énergie (proportionnelle à l'intensité) :

$$\frac{\partial W(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - D\Delta W(\mathbf{r}, t) = \delta(t)\delta(\mathbf{r}) \quad (17)$$

avec :

$$D = \frac{1}{d} V_E l^* \quad (18)$$

Ici apparaît le troisième paramètre essentiel, la *constante de diffusion*, homogène à une surface balayée par unité de temps. Contrairement aux deux précédents, il s'agit ici d'un paramètre dynamique au sens où on ne peut le déterminer que dans une expérience en régime impulsionnel. La constante de diffusion est une mesure de la vitesse d'extension de la zone atteinte par la diffusion, le « halo de diffusion », comme on peut le voir dans l'expression de la solution de l'équation de la diffusion (20) en milieu infini :

$$W(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{d/2}} e^{-\frac{\mathbf{r}^2}{4Dt}} \quad (20)$$

On reconnaît dans cette expression la loi de distribution de probabilité que l'on obtient pour la marche aléatoire de « l'homme ivre » quand le nombre de pas du marcheur tend vers l'infini. La propagation de l'intensité dans le milieu est donc analogue à la marche aléatoire d'une particule.

Voilà qui donne une base microscopique à l'équation de la diffusion qui gouverne la propagation de l'intensité moyenne dans un milieu multidiffuseur infini au delà d'un *libre parcours moyen élastique*. Dans la pratique, nous travaillons en fait avec des échantillons de taille finie. Il convient donc d'aborder le délicat problème des conditions aux limites.

1.4.2. Conditions aux limites pour un milieu semi-infini

On s'intéresse à présent à la propagation d'une onde ultrasonore dans un milieu aléatoire désordonné semi-infini compris entre les abscisses $z = 0$ et $z = L$ (cf. figure 2) en supposant qu'elle obéit à l'équation de la diffusion (17) portant sur la densité moyenne d'énergie locale (ou l'intensité moyenne dans le milieu qui lui est proportionnelle).

Il faut écrire que le flux net d'énergie arrivant dans l'échantillon depuis l'extérieur est nul. On peut alors montrer que les conditions aux limites pour l'intensité s'écrivent [7] :

$$\left\{ \begin{array}{l} I + z_0 \frac{\partial I}{\partial Z} = 0, \quad z = L \\ I - z_0 \frac{\partial I}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \end{array} \right.$$

avec $z_0 = \frac{2}{3}l^*$ à trois dimensions et $z_0 = \frac{\pi}{4}l^*$ à deux dimensions.

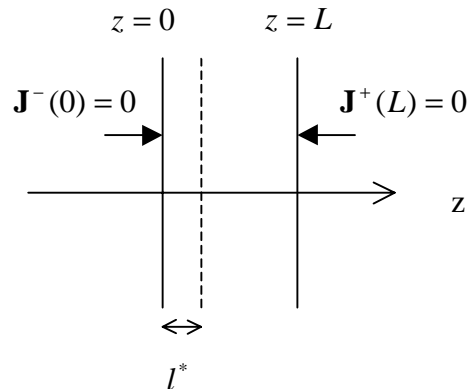


Fig.2. Recherche des conditions aux limites pour un échantillon semi-infini. Le flux entrant dans l'échantillon est nul.

Une extrapolation linéaire de ces conditions aux interfaces donne [7].

$$I = 0 \text{ en } z = -z_0 \text{ et en } z = L + z_0$$

On se ramène ainsi à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes. Certains auteurs déduisent alors la solution en milieu semi-infini de la solution en milieu infini par application du théorème des images [8]. En fait, le calcul rigoureux fondé sur la décomposition de la solution sur les modes propres du Laplacien n'est pas plus compliqué.

1.4.3. Courbe de distribution des temps de vol

Etant donné une onde plane arrivant sur un milieu aléatoire désordonné bidimensionnel semi-infini compris entre les abscisses $z = 0$ et $z = L$, on s'intéresse à l'intensité transmise en $z = L$.

La solution de l'équation (17) avec les conditions aux limites précédentes se décompose aisément sur les modes propres ϕ_p de l'opérateur Laplacien :

$$I(x - x', z, z'; t) = \frac{e^{-(x-x')^2/4Dt}}{\sqrt{4\pi Dt}} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \phi_p(z) \phi_p(z') e^{-\lambda_p^2 Dt}$$

avec :

$$\lambda_p = \frac{p\pi}{B}, \quad B = L + 2z_0$$

$$\phi_p(z) = \sin \frac{p\pi z}{B}$$

$$\phi_p(z') = \sin \frac{p\pi z'}{B}$$

L'expression de l'intensité moyenne transmise à travers le milieu s'écrit donc :

$$I(x-x', z, z'; t) = \frac{e^{-(x-x')^2/4Dt}}{\sqrt{4\pi Dt}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2\pi^2 Dt}{B^2}} \left[\cos \frac{\pi m(z-z')}{B} - \cos \frac{\pi m(z+z'+2z_0)}{B} \right] \quad (21)$$

Pour $z'=0$ et $z=L$, l'allure de cette courbe qu'on appelle généralement « distribution des temps de vol » est présentée Fig. 3 en unités adimensionnées. Le maximum de cette distribution est atteint pour $t \approx 0.1 \frac{L^2}{D}$. Après ce maximum, l'intensité présente une décroissance exponentielle avec un temps caractéristique d'amortissement proche de $\xi = L^2 / D\pi^2$. La mesure expérimentale de l'intensité transmise fournit donc a priori une méthode pour déterminer la constante de diffusion comme nous le verrons dans le détail dans le paragraphe 2.

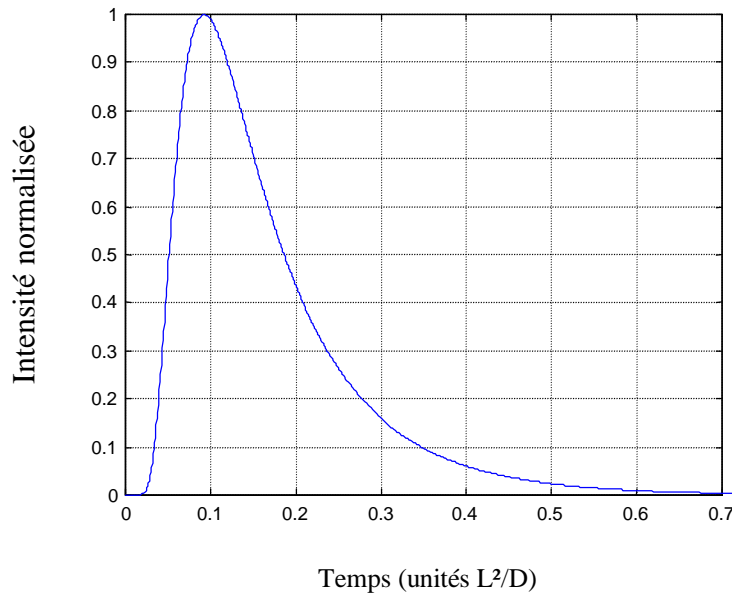


Fig.3. Courbe de distribution des temps de vol

1.4.4. Transmittance stationnaire

Que l'on intègre sur le temps la distribution des temps de vol (21) ou que l'on résolve l'équation de la diffusion en régime stationnaire, c'est-à-dire sans la dérivée temporelle, on trouve une dépendance algébrique pour la transmittance moyenne [15] :

$$T(L) \propto \frac{l^*}{L} \quad (22)$$

Le coefficient de proportionnalité dépend des conditions aux limites retenues, de leur extrapolation à l'origine, du type d'illumination etc. A priori, une mesure stationnaire de la transmittance dans des conditions expérimentales bien définies permet donc d'accéder au libre parcours moyen de transport.

En conclusion, au delà d'un ou de quelques libres parcours moyen, on peut s'attendre à ce que la propagation de l'intensité moyenne dans le milieu soit bien décrite par l'équation de la diffusion. On rappelle que cela revient à traiter le problème de la marche aléatoire d'une particule à deux dimensions. Les deux paramètres importants dans ce régime sont *le libre parcours moyen de transport* qui mesure la distance au bout de laquelle l'onde incidente a perdu la mémoire de sa direction et *la constante de diffusion* qui est une mesure de la vitesse de croissance du halo de diffusion dans le milieu.

L'équation de la diffusion permet d'expliquer bon nombre de résultats expérimentaux concernant les milieux multidiffuseurs ; nous allons en voir une illustration dans le second paragraphe. Cependant, aucune information de phase n'y est présente puisque c'est l'intensité moyenne dans le milieu qui y obéit. Cette description suppose que la répartition d'intensité résultant du jeu complexe d'interférences constructives et destructives entre toutes les ondes diffusées, dite figure de *speckle*, est constituée de grains indépendants les uns des autres. Or, ce n'est pas tout à fait le cas comme l'atteste, en optique et en physique des micro-ondes, l'existence de corrélations longue portée du *speckle* que nous discutons dans l'annexe 2.

Nous verrons dans le troisième chapitre une autre manifestation du fait que l'approximation de Boltzmann et l'équation de la diffusion qui en découle sont insuffisantes pour décrire tous les aspects de la propagation en milieu multidiffuseur, le *cône de rétrodiffusion cohérente*, souvent associé au régime de localisation faible, que nous avons enregistré pour la première fois en dynamique en acoustique [9].

2. Mesures expérimentales de l'intensité moyenne transmise

Résumons ici les principales conclusions du chapitre précédent.

Lorsque l'épaisseur d'un milieu diffuseur est plus grande que son libre parcours moyen élastique, l'intensité cohérente devient négligeable devant l'intensité moyenne des ondes diffuses, c'est-à-dire l'intensité incohérente. La propagation de celle-ci est généralement bien décrite par une équation de la diffusion qui fait intervenir deux nouveaux paramètres de transport : le libre parcours moyen de transport l^* qui représente la distance au bout de laquelle l'onde a perdu la mémoire de sa direction incidente, et la constante de diffusion D qui est reliée à la vitesse de croissance du halo de diffusion dans le milieu. Si l'on connaît la valeur de la section efficace totale des diffuseurs, on peut déduire l^* du libre parcours moyen élastique, ce qui fait la transition entre les mondes probabilistes en amplitude et en intensité. La constante de diffusion peut quant à elle être déterminée par la mesure de l'intensité moyenne transmise en fonction du temps.

Dans ce paragraphe, nous présentons des mesures d'intensité transmise à travers notre milieu prototype et discutons l'influence de l'absorption sur la mesure de la constante de diffusion par cette méthode.

2.1. Détermination du libre parcours moyen de transport

Nous avons vu au paragraphe 1.4.4. que l'évolution en fonction de l'épaisseur du coefficient de transmission de l'intensité est a priori un moyen d'accéder au libre parcours moyen de transport. Cela étant, pour nos échantillons, le régime de diffusion multiple n'est véritablement établi que pour $L = 80mm$. Or, pour cette épaisseur, le bruit n'est plus négligeable et vient altérer nos mesures. Pour des épaisseurs encore plus importantes, il devient même difficile de transmettre de l'énergie à travers l'échantillon. Nous aurions donc trop peu de points de mesure pour déterminer le libre parcours moyen de transport par cette méthode.

Cela étant, connaissant la section efficace de diffusion d'une tige (cf. chapitre 1, paragraphe 2), nous pouvons anticiper la valeur du libre parcours moyen de transport. On rappelle en effet (paragraphe 1.4.1) que :

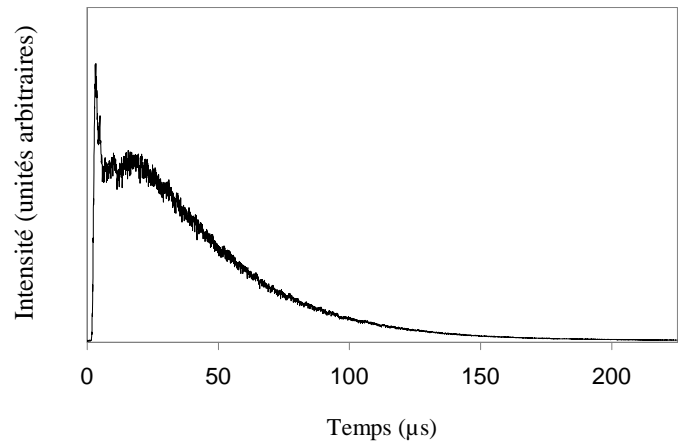
$$l^* = \frac{l_s}{1 - \overline{\cos\theta}} \quad (23)$$

Pour une tige, à 3.2 MHz, $\overline{\cos\theta} = 0.13$, ce qui donne $l^* = 4.8mm$ si on utilise la valeur du libre parcours moyen élastique $l_s = 4.2mm$ calculée au chapitre 1 en utilisant la formule de « l'independent scattering approximation » (Eq. 39. Chapitre 1). Si on utilise la valeur du libre parcours moyen déterminée expérimentalement et qui inclut d'éventuels mécanismes d'absorption dans le milieu, on trouve $l^* = 4.6mm$.

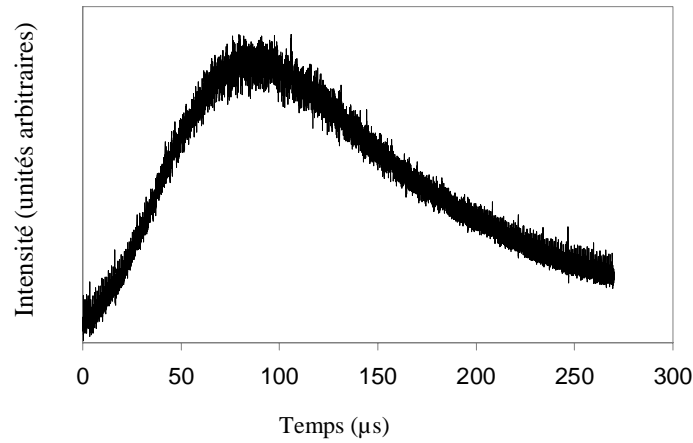
2.2. Détermination de la constante de diffusion

Nous avons vu dans le paragraphe 1 que la mesure de l'intensité moyenne transmise en fonction du temps, également appelée « courbe de distribution des temps de vol » [8], pouvait être un moyen d'accéder à la constante de diffusion.

Nos transducteurs piézo-électriques sont capables de suivre l'évolution temporelle du champ de pression. Dans un montage analogue à celui présenté dans le chapitre 1 pour les mesures d'amplitude transmise (chapitre 1, figures 6 et 7), il nous est donc possible de déterminer la moyenne sur le désordre de l'intensité instantanée transmise à travers le milieu. Le transducteur source émet 5 arches de sinusoides à 3.2. MHz. Nous présentons Fig. 4.a et 4.b les résultats bruts obtenus pour deux épaisseurs différentes du milieu. La courbe 4.c est obtenue en intégrant l'énergie sur des fenêtres temporelles de 1 μs , soit à peu près la longueur de l'impulsion initiale.

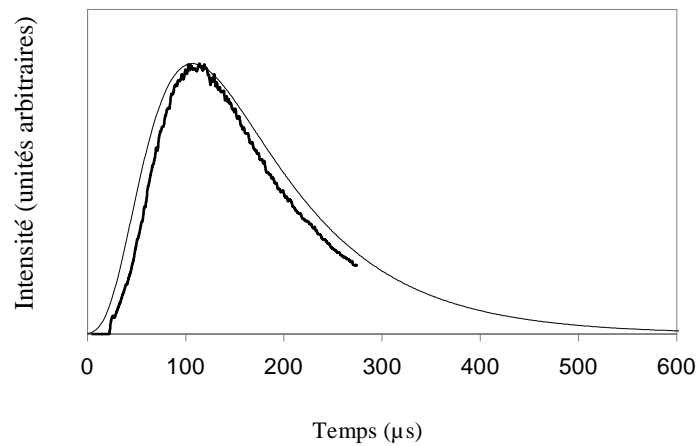


a)



b)

2



c)

Fig. 4. Intensité moyenne transmise à travers le fantôme de tiges. Données expérimentales brutes (a) et (b). (a) $L=35$ mm, (b) $L=70$ mm. (c) Fit de la courbe (b) lissée. Le fit est fondé sur la solution de l'équation de la diffusion en milieu semi-infini (Eq. 24) avec absorption.

Qualitativement, les observations du chapitre précédent se trouvent ici confirmées. En effet, pour $L = 35\text{mm}$, c'est-à-dire pour une épaisseur égale à neuf fois le libre parcours moyen, l'intensité du front cohérent est encore supérieure au maximum d'intensité des ondes diffuses (Fig. 4.a). En fait, le profil typique de la diffusion ne se construit que très progressivement en fonction de l'épaisseur. A 80 mm, on peut estimer que le régime de diffusion est bien établi. Le fit par la solution de l'équation de la diffusion en milieu semi-infini sans absorption (Eq. 16) fournit $D = 5.2 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$

A ce stade, nous avons donc une estimation pour le libre parcours moyen de transport et pour la constante de diffusion. Pourtant, la valeur de la vitesse de transport qui en découle par la relation (18), soit $V_E = 2.1\text{mm}/\mu\text{s}$, est manifestement surévaluée puisque supérieure à la vitesse de phase dans l'eau. C'est donc que notre libre parcours moyen de transport est sous évalué ou que notre constante de diffusion est au contraire surévaluée.

Afin de trancher, il nous faut une mesure expérimentale du libre parcours moyen de transport ou une autre mesure de la constante de diffusion. Nous verrons dans le troisième chapitre que la réponse vient de l'enregistrement du cône de rétrodiffusion cohérente qui fournit les valeurs $D = 3,2\text{mm}^2/\mu\text{s}$ et $l^* = 4,8\text{mm}$. En effet, la valeur de la constante de diffusion trouvée par cette méthode n'est pas entachée d'erreurs même en présence d'absorption dans le milieu. Sur les courbes d'intensité moyenne transmise, l'absorption peut être prise en compte par l'adjonction d'un facteur $\exp(-t/\tau_a)$ où τ_a est le temps moyen d'absorption [8]. C'est-à-dire que la courbe de distribution des temps de vol devient :

$$I(t) = \frac{e^{-t/\tau_a}}{\sqrt{4\pi Dt}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2 \pi^2 Dt}{B^2}} \left[\cos \frac{\pi mL}{B} - (-1)^m \right] \quad (24)$$

Par conséquent, si on utilise la valeur de la constante de diffusion $D = 3,2\text{mm}^2/\mu\text{s}$, déterminée par l'enregistrement du cône de rétrodiffusion cohérente, pour fitter les courbes d'intensité moyenne transmise, qui elles sont très sensibles à l'absorption, on trouve $\tau_a = 250\mu\text{s}$, soit $l_a = 375\text{mm}$. En utilisant la valeur du libre parcours moyen déterminée par les mesures de l'amplitude moyenne transmise, qui incluait les effets de l'absorption, on déduit de la formule (43) du chapitre 1, $l_s = 4.2\text{mm}$, valeur en parfait accord avec celle donnée par la formule fondamentale de « l'independent scattering approximation » (Eq. 39, chapitre 1)

Nous disposons donc d'une méthode originale pour faire la part respective de l'absorption et de la diffusion élastique dans l'atténuation observée.

Dans notre cas, les sources d'absorption sont nombreuses. L'atténuation dans l'eau pour nos plages de fréquence, de l'ordre de 0.1 dB/m, ne l'explique pas. Par contre, le système de tiges n'est pas totalement bidimensionnel. Les tiges sont en effet prisonnières entre deux plaques dans des logements de 1mm de diamètre. Par conséquent, il est impossible d'assurer qu'elles soient toutes parallèles entre elles d'une part, parfaitement parallèles à la source et aux récepteurs d'autre part. De l'énergie est donc susceptible d'être diffusée vers le haut ou vers le bas, en dehors du champ du récepteur. Par ailleurs, notre échantillon étant de taille finie, on ne peut négliger les fuites sur les bords.

En conclusion, les mesures de l'amplitude et de l'intensité moyenne transmises à travers un milieu désordonné multidiffuseur fournissent des ordres de grandeur des paramètres de transport. Toutefois, il est préférable de recouper les valeurs ainsi obtenues avec celles issues de l'enregistrement du cône de rétrodiffusion cohérente présentées au chapitre 3. En effet, les courbes de distribution des temps de vol sont extrêmement sensibles à l'absorption alors que la valeur de la constante de diffusion fournie par l'enregistrement du cône de rétrodiffusion cohérente n'est pas modifiée par celle-ci. L'utilisation concomitante des deux méthodes permet d'accéder à la fois au libre parcours moyen d'absorption et au libre parcours moyen élastique.

ANNEXE 1

Equation de transport

Etant donné une perturbation initiale localisée dans le temps (à $t = 0$) et dans l'espace, nous cherchons à suivre l'évolution spatio-temporelle de l'intensité moyenne $\langle I(t; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle = \langle |G(t; \mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 \rangle$.

Sa transformée de Laplace s'écrit :

$$\langle I(\Omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle = \left\langle \int_0^{\infty} dt |G(t; \mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 e^{i(\Omega + i\varepsilon)t} \right\rangle$$

Si l'on décompose la fonction de Green en amplitude sur les fréquences :

$$G(t; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} G(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{i\omega t}$$

L'intensité peut se réécrire :

$$\langle I(\Omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle = \left\langle \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} G(\omega + \Omega/2 + i\varepsilon; \mathbf{r}, \mathbf{r}') G(\omega - \Omega/2 - i\varepsilon; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\rangle$$

Décomposons maintenant la fonction de Green sur ses fréquences spatiales :

$$G(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} G(\omega, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) e^{i(-\mathbf{k}_1 \mathbf{r} + \mathbf{k}_2 \mathbf{r}')}$$

L'intensité s'écrit donc finalement :

$$\langle I(\Omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \langle G(\omega + \Omega/2 + i\varepsilon, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) G^*(\omega - \Omega/2 - i\varepsilon, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \rangle e^{i[\mathbf{r}(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1) - \mathbf{r}'(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4)]}$$

En fait, cette quantité ne dépend que de la différence $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ puisqu'elle résulte d'une moyenne sur toutes les positions possibles des diffuseurs. Par conséquent, on peut écrire,

$$\langle G(\omega + \Omega/2 + i\varepsilon, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) G^*(\omega - \Omega/2 - i\varepsilon, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \rangle = \phi_{\omega, \mathbf{k}\mathbf{k}'}(\Omega, \mathbf{q}) \times (2\pi)^3 \delta(-\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

avec les changements de variable :

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k} + \mathbf{q}/2$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}' + \mathbf{q}/2$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{k} - \mathbf{q}/2$$

et compte tenu de la symétrie de translation du milieu moyen qui implique la conservation du vecteur d'onde :

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{k}' - \mathbf{q}/2$$

A des constantes numériques près, $\phi_{\omega, \mathbf{k}\mathbf{k}'}$ est la définition microscopique de l'intensité spécifique, c'est à dire la densité de puissance diffusée dans la direction \mathbf{k} pour la direction d'illumination \mathbf{k}' . Pour un point source, l'intensité spécifique est sommée sur tous les vecteurs incidents possibles.

$$\phi_{\omega \mathbf{k}}(\Omega, \mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{k}'} \phi_{\omega, \mathbf{k}\mathbf{k}'}(\Omega, \mathbf{q})$$

L'interprétation des variables est la suivante. On s'intéresse à la propagation d'un pulse d'intensité dans le milieu. La fréquence ω et le vecteur d'onde \mathbf{k} sont relatifs aux oscillations

internes de la porteuse de l'onde tandis que la fréquence Ω et le vecteur d'onde \mathbf{q} sont relatifs à son enveloppe.

Après quelques manipulations, l'équation de *Bethe Salpeter* s'écrit dans l'espace des vecteurs d'ondes :

$$\left[\frac{i\omega\Omega}{c_0^2} - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q} + \Delta\Sigma_{\omega,\mathbf{k}}(\Omega, \mathbf{q}) \right] \phi_{\omega,\mathbf{k}}(\Omega, \mathbf{q}) = \Delta G_{\omega,\mathbf{k}}(\Omega, \mathbf{q}) \left[1 + \sum_{\mathbf{k}'} U_{\omega,\mathbf{k},\mathbf{k}'}(\Omega, \mathbf{q}) \phi_{\omega,\mathbf{k}'}(\Omega, \mathbf{q}) \right]$$

où l'on a introduit :

$$\Delta\Sigma_{\omega\mathbf{k}}(\Omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{2i} \{ \Sigma(\omega + \Omega/2 + i\varepsilon/2, \mathbf{k} + \mathbf{q}/2) - \Sigma(\omega - \Omega/2 + i\varepsilon/2, \mathbf{p} - \mathbf{q}/2) \}$$

$$\Delta G_{\omega\mathbf{k}}(\Omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{2i} \{ G(\omega + \Omega/2 + i\varepsilon/2, \mathbf{k} + \mathbf{q}/2) - G(\omega - \Omega/2 - i\varepsilon/2, \mathbf{p} - \mathbf{q}/2) \}$$

ANNEXE 2

Corrélations du speckle

La démarche adoptée dans les deux premiers chapitres a permis de donner une base microscopique à l'équation de la diffusion qui décrit la propagation de la moyenne de l'intensité acoustique dans un milieu aléatoire désordonné. L'intensité moyenne dans le milieu semble se comporter comme une particule qui serait soumise à une marche aléatoire.

Expérimentalement, sur une réalisation du désordre, la répartition spatiale de l'intensité dans le milieu est caractérisée d'un point à l'autre par des fluctuations locales de grande amplitude qui résultent du jeu complexe d'interférences constructives et destructives entre ondes diffusées. Il est possible de déterminer l'échelle caractéristique de ces fluctuations en calculant la corrélation spatiale de l'intensité dans le milieu à une fréquence donnée, soit

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{\langle I(\mathbf{r}, \omega)I(\mathbf{r}', \omega) \rangle - \langle I(\mathbf{r}, \omega) \rangle \langle I(\mathbf{r}', \omega) \rangle}{\langle I(\mathbf{r}, \omega) \rangle \langle I(\mathbf{r}', \omega) \rangle}. \text{ Pour un point source en milieu infini, B. Shapiro}$$

et al. ont montré en 1986 [10] en utilisant une approche diagrammatique qu'elle est le produit d'un sinus cardinal élevé au carré par un facteur exponentiel dont l'échelle caractéristique est le libre parcours moyen de transport (Eq. 1). Autrement dit, la taille typique d'un grain de *speckle* est un libre parcours moyen mais au sein d'un grain de *speckle* l'intensité varie rapidement comme la longueur d'onde.

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \left[\frac{\sin(k_0 \Delta \mathbf{r})}{k_0 \Delta \mathbf{r}} \right]^2 e^{-\Delta \mathbf{r} / l^*} \quad (1)$$

En particulier, pour $\Delta \mathbf{r} = 0$, on retrouve le fait que la moyenne d'ensemble de l'intensité est égale à son écart type, résultat conforme à l'idée que la distribution de probabilité de l'intensité suit la loi de Rayleigh (2) si l'on suppose que l'amplitude en un point \mathbf{r} est la somme de facteurs de phase aléatoires décorréliées [11] :

$$P(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} e^{-\frac{I}{\langle I \rangle}} \quad (2)$$

Pourtant, en physique du solide où le même modèle de diffusion est adopté pour la propagation de l'électron qui diffuse sur les impuretés du réseau cristallin, l'étude des fluctuations de conductance dans de petits circuits métalliques a montré que celles ci sont statistiquement corrélées d'un point à un autre. Ces corrélations sont à l'origine des fluctuations géantes, que l'on appelle les *fluctuations universelles de conductance*.

En 1988, *Feng* et al. [12] ont extrapolé ces résultats au cas d'une onde classique scalaire se propageant dans un milieu désordonné confiné dans une boîte aux bords réfléchissants (Fig. 1). a et b étant les indices des modes transverses du guide en dehors du milieu désordonné, c'est-à-dire des ondes stationnaires de vecteur d'onde transverse $q_a = a\pi/W$ où W est la taille transverse du guide, on peut définir la transmittance du mode a vers le mode b comme le rapport de l'intensité I_b mesurée sur le canal b lorsque l'intensité incidente sur le canal a est I_a .

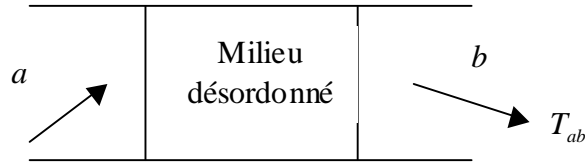


Fig. 1. Définition de la transmittance pour un échantillon désordonné aux bords réfléchissants.

Feng. et al. se sont intéressés au calcul des corrélations $C_{aba'b'} = \langle \delta T_{ab} \delta T_{a'b'} \rangle$ avec $\delta T_{ab} = T_{ab} - \langle T_{ab} \rangle$

Par analogie avec la physique du solide, la conductance, paramètre essentiel en particulier dans les théories de la localisation, est définie comme la moyenne d'ensemble de la somme sur tous les modes de la transmittance du canal a au canal b .

$$g = \sum_{a,b} \langle T_{a,b} \rangle \quad (3)$$

Au premier ordre en $1/kl^*$, $C_{aba'b'}$ est la somme de trois contributions:

$$C_{aba'b'}^{(1)} = D_1 \langle T_{ab} \rangle \langle T_{a'b'} \rangle \delta_{\Delta q_a, \Delta q_b} F_1(\Delta q_a L)$$

$$C_{aba'b'}^{(2)} = \frac{1}{g} D_2 \langle T_{ab} \rangle \langle T_{a'b'} \rangle [F_2(\Delta q_a L) + F_2(\Delta q_b L)]$$

$$C_{aba'b'}^{(3)} = \frac{1}{g^2} D_3 \langle T_{ab} \rangle \langle T_{a'b'} \rangle$$

avec :

$$F_1(x) = x^2 / \sinh^2 x$$

$$F_2(x) = 2x^{-1} [\coth x - x / \sinh^2 x]$$

Les coefficients D sont de l'ordre de l'unité sauf lorsque $W > L$ auquel cas $D_3 = W/L$

Un grand nombre de résultats peut être retrouvé sur la base de ces formules. Le premier terme n'est présent que pour $\Delta q_b = \Delta q_a$ et n'est significatif que pour $\Delta q_a < 1/L$ compte tenu de la décroissance exponentielle de F_1 pour $x \gg 1$. En particulier, lorsque $\Delta q_b = \Delta q_a = 0$, le premier terme domine et sa contribution seule vaut $\langle T_{ab} \rangle^2$. C'est-à-dire que l'on retrouve les fluctuations locales du *Speckle* évoquées plus haut. La « nouveauté » vient du fait que ce terme contribue à la corrélation tant que $\Delta q_b = \Delta q_a$. Cela revient à dire que si le faisceau incident est incliné d'un certain angle θ , le *speckle* transmis sera, en moyenne, incliné du même angle, ce que l'on appelle, « l'effet mémoire ». Cet effet est évident pour un diffuseur unique mais qu'il reste valable en moyenne en régime multidiffuseur est loin d'être aussi évident.

Le second terme est plus petit d'un facteur $1/g$ mais domine si les canaux d'entrée (ou les canaux de sortie) sont les mêmes. Par exemple, ce terme est dominant dans les corrélations entre canaux de sortie si on illumine l'échantillon par une onde plane, ce qui donne une méthode pour le mesurer [14]. Il existe donc des corrélations longue portée dans le *speckle* transmis. Ce résultat valide pour les corrélations entre canaux a depuis été étendu et vérifié expérimentalement en micro-ondes et en optique pour les corrélations spatiales, fréquentielles [14] et temporelles [13] de l'intensité et

ce dans des milieux ouverts lorsque la largeur d'illumination est très supérieure à l'épaisseur de l'échantillon. En acoustique, de telles corrélations n'ont jamais été mises en évidence.

Le troisième terme donne une corrélation positive uniforme de tous les canaux quelle que soit l'étendue de leur séparation, contribution qu'il est très difficile de détecter. Sur un échantillon donné, il produit simplement un décalage dans la moyenne spatiale de l'intensité sur un grain de *speckle*. Ces fluctuations ne sont pas diminuées en moyennant sur une étendue spatiale croissante. Ce sont ces corrélations de portées infinies qui produisent les fluctuations universelles de conductance.

D'après le paragraphe précédent, $\sum_b \langle T_{ab} \rangle \approx \frac{l^*}{L}$ (transmittance intégrée sur tous les canaux de sortie pour une illumination plane). Si N est le nombre de canaux transverses ($N \approx k^{d-1}W$), $g \approx N \frac{l^*}{L}$ et $\langle T_{ab} \rangle \approx \frac{1}{NL}$. Par conséquent, $C^{(3)} \approx \frac{1}{N^4}$ et la variance de la conductance vaut donc:

$$\langle \delta g^2 \rangle = \sum_{aba'b'}^N C_{aba'b'} \approx \sum_{aba'b'}^N C_{aba'b'}^{(3)} \approx 1$$

On retrouve le résultat connu selon lequel la variance de la conductance est de l'ordre de l'unité. Dans un régime proche de la localisation d'Anderson, pour lequel $g \approx 1$, ces corrélations sont à l'origine de fluctuations géantes que l'on appelle *les fluctuations universelles de conductances*.

A ce jour, aucune preuve expérimentale de l'existence de telles corrélations n'existe en acoustique.

REFERENCES

- ¹ A. Lagendijk and B.A. van Tiggelen, Phys. Rep, **270**, 143 (1996).
- ² G.C. Papanicolaou and R. Burridge, J. Math. Phys. **16**, 2074 (1975).
- ³ S. Chandrasekhar, “Radiative Transfer”, Oxford University Press, London, New York, 1950, 1960.
- ⁴ Arnaud Derode, “La cohérence des ondes ultrasonores en milieu hétérogène”, Thèse de doctorat, Université Paris VII, décembre 1994.
- ⁵ M.P. van Albada, B.A. van Tiggelen, A. Lagendijk and A. Tip, « Speed of propagation of classical waves in strongly scattering media », Phys. Rev. Lett. **66**, 3132 (1991).
- ⁶ J. H. Page, Ping Sheng, H. P. Sreier, I. Jones, Xiaodun Jing, D. A. Weitz, Science, **271**, 634 (1996).
- ⁷ Ping Sheng, “Introduction to Wave Scattering, Localization, and Mesoscopic phenomena”, Academic Press, 1995.
- ⁸ A. Z. Genack, in “Scattering and Localization of Waves in Random Media”, edited by Ping Sheng, World Scientific, Singapore, 1990, pp. 207-311.
- ⁹ A. Tourin, A. Derode, P. Roux, B. A. van Tiggelen, and M. Fink, Phys. Rev. Lett. **79**, 3637 (1997)
- ¹⁰ B. Shapiro, Phys. Rev. Lett. **57**, 2168 (1986).
- ¹¹ J.W. Goodman, “Statistical Optics”, J. Wiley & Sons (1985).
- ¹² S. Feng et al., Phys. Rev. Lett. **61**, 834 (1988).
- ¹³ F. Scheffold, W. Härtl, G. Maret, E. Matijevic, Phys. Rev. B, **56**, 10942, (1997).
- ¹⁴ A. Z. Genack et al. in OSA Proceedings on “Advances in Optical Imaging and Photon Migration”, edited by R.R. Alfano, Optical Society of America, Washinton DC, (1994)

Chapitre III

Diffusion multiple et réciprocité

Le cône de rétrodiffusion cohérente en acoustique

Dans le chapitre précédent, nous avons exploité les signaux transmis à travers un milieu désordonné qui consistait en une collection de tiges aléatoirement réparties. Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux signaux rétrodiffusés en mettant en lumière les conséquences de la réciprocité du milieu sur leur moyenne ; c'est ainsi que nous mettons à profit la technologie des réseaux de transducteurs piézo-électriques pour mettre en évidence « l'effet de rétrodiffusion cohérente en acoustique ».

Le cône de rétrodiffusion cohérente constitue une fort belle illustration des effets conjugués de la réciprocité d'un milieu et de son caractère multidiffuseur. La première mise en évidence expérimentale en optique remonte à 1985 [1,2]. C'était la première manifestation du fait que la théorie de Boltzmann, et en particulier l'équation du transfert radiatif qui en découle, sont insuffisantes pour décrire tous les aspects de la propagation de la lumière en milieu désordonné. L'effet de "rétrodiffusion cohérente" prouve en effet que toute cohérence des ondes n'est pas perdue, même dans un milieu fortement multidiffuseur; plus précisément, dans la direction initiale d'illumination de l'échantillon, les interférences constructives entre chemins réciproques font, qu'en moyenne, un facteur deux est observé sur l'intensité rétrodiffusée par rapport aux autres directions, ce qui définit un cône dont la largeur est liée aux propriétés de transport du milieu.

Dans la première partie, nous présentons le cône de rétrodiffusion cohérente « stationnaire » pour un échantillon aléatoire bidimensionnel constitué de milliers de tiges aléatoirement réparties. En outre, nos transducteurs étant capables de suivre l'évolution temporelle du champ de pression, nous enregistrons pour la première fois le cône de rétrodiffusion cohérente « dynamique » [3]. Dans le second paragraphe, nous présentons une explication simple de l'effet. Dans le troisième, nous détaillons la théorie qui permet une analyse quantitative de nos résultats. Nous montrons en particulier que la largeur du cône « stationnaire » est liée à l'inverse du libre parcours moyen de transport tandis que son évolution en fonction du temps donne accès à la constante de diffusion. Enfin, dans la quatrième et dernière partie, nous présentons des applications potentielles du cône de rétrodiffusion cohérente à la caractérisation de milieux hétérogènes tels que les aciers à grains.

1. Enregistrement de l'intensité rétrodiffusée

1.1. Une réalisation du désordre

Afin de mesurer les signaux rétrodiffusés par un échantillon analogue à celui étudié dans les deux premiers chapitres, d'épaisseur $L = 80\text{mm}$, nous utilisons le montage présenté Fig. 1.

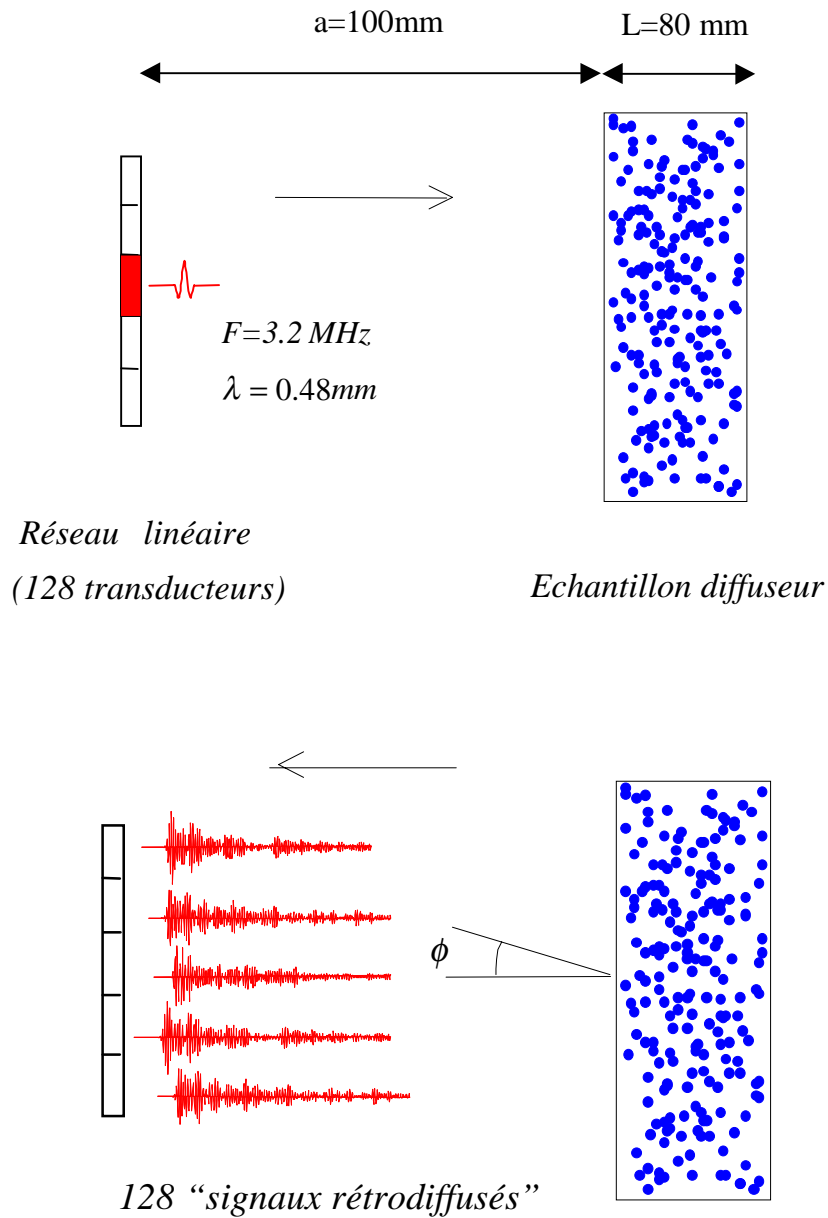


Fig. 1. Montage expérimental pour l'enregistrement des signaux rétrodiffusés . Le n° du capteur de réception est converti en angle ϕ . L'échantillon est constitué de 6000 tiges en acier aléatoirement réparties et immergées dans l'eau.

Nous utilisons un réseau de 128 transducteurs piézo-électriques de fréquence centrale 3.2MHz correspondant à une longueur d'onde de 0.48 mm dans l'eau. La largeur d'un élément est 0.38 mm et sa hauteur 12 mm . L'écart entre deux transducteurs est de 0.42 mm . Les transducteurs sont donc séparés d'environ une longueur d'onde.

Initialement, le transducteur central #64 émet 15 arches de sinusoïde. Les signaux rétrodiffusés, d'une durée d'environ $300\text{ }\mu\text{s}$, sont enregistrés sur chacun des éléments du réseau, ce qui donne accès à la répartition spatiale du champ multidiffusé. Puisque nous enregistrons l'amplitude en fonction du temps, nous pouvons choisir de calculer l'intensité rétrodiffusée en intégrant sur la totalité du signal ("cas stationnaire") ou sur des fenêtres temporelles de tailles comparables à la durée du train d'ondes initial ("cas dynamique").

Par exemple, nous représentons sur la figure 2 la répartition angulaire de l'énergie rétrodiffusée intégrée sur une fenêtre de taille $\Delta T = 5\text{ }\mu\text{s}$ située $11\text{ }\mu\text{s}$ après le premier écho reçu. Nous obtenons une figure typique de *speckle* caractérisée par l'occurrence de pics et de creux d'intensité pour des angles aléatoires. Une telle figure de *speckle* est caractéristique de la réalisation du désordre considérée. Pour une autre réalisation du désordre, c'est-à-dire dans notre cas pour une autre position du réseau par rapport à l'échantillon, la figure de *speckle* obtenue serait différente.

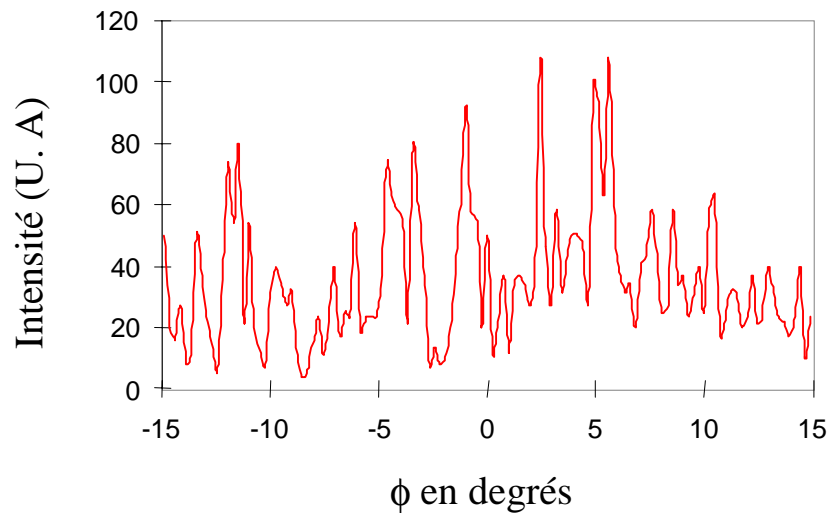


Fig. 2. Figure de *speckle* en rétrodiffusion : répartition angulaire de l'intensité dynamique rétrodiffusée par un échantillon d'épaisseur $L = 80\text{ mm}$. La fenêtre d'intégration est située $11\text{ }\mu\text{s}$ après le premier écho reçu, sa largeur vaut $\Delta T = 5\text{ }\mu\text{s}$.

A présent, que se passe-t-il lorsque plusieurs figures de *speckle* sont moyennées ?

1.2. Moyenne sur le désordre

Compte tenu du caractère supposé purement aléatoire de la propagation dans le milieu, on peut s'attendre, si l'on moyenne plusieurs figures de *speckle* obtenues pour des réalisations différentes du désordre, à observer une répartition isotrope de l'intensité moyenne rétrodiffusée.

Expérimentalement, afin de moyenner sur le désordre, la séquence précédemment décrite est reproduite pour 80 positions du réseau que l'on translate parallèlement à l'échantillon après chaque nouvelle acquisition. Le pas entre deux positions du réseau est choisi de telle sorte que les signaux rétrodiffusés pour chacune des deux positions soient complètement décorrélés.

1.2.1. Cône stationnaire

Nous présentons sur la figure 3 la moyenne sur le désordre de « l'intensité stationnaire », c'est-à-dire intégrée sur la totalité du signal.

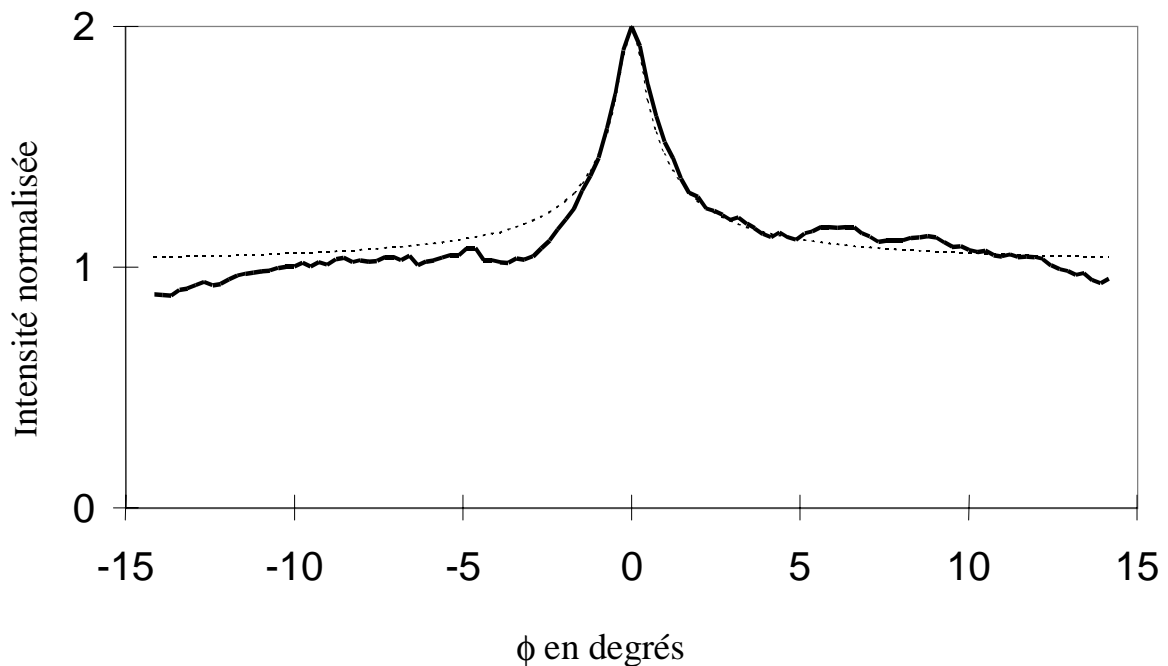


Fig. 3. Moyenne sur le désordre de l'intensité stationnaire. Trait plein: courbe expérimentale. Trait pointillé: fit d'après la théorie exposée au paragraphe 3.

En fait de répartition isotrope, nous obtenons un pic centré sur la direction incidente. C'est dire que pour cette direction particulière la cohérence persiste pour chaque réalisation du désordre en dépit de la diffusion multiple. C'est l'effet de "rétrodiffusion cohérente" bien connue en optique. Une interprétation heuristique simple peut en être donnée comme nous le verrons dans le second paragraphe.

1.2.2. Cône dynamique

Sur le même principe, nous choisissons cette fois de moyennner sur le désordre l'intensité intégrée sur de petites fenêtres temporelles prises à des instants différents dans le signal.

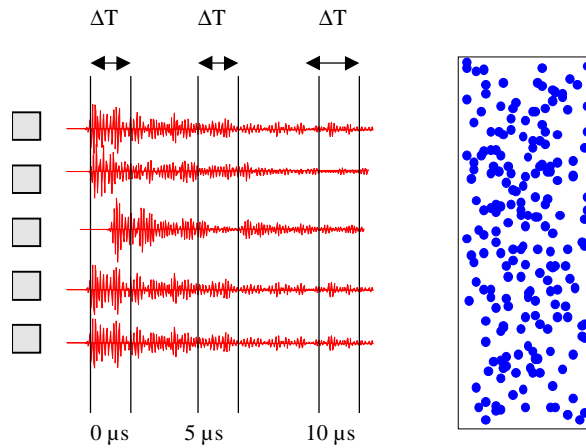


Fig.4. L'intensité rétrodiffusée est intégrée sur des fenêtres temporelles de largeur $\Delta T = 5\mu s$ prises à différents instants après le premier écho reçu.

Nous mettons ainsi pour la première fois en évidence l'évolution de l'effet de rétrodiffusion cohérente en fonction du temps [3] (Fig. 5). On constate que la largeur du cône s'affine avec le temps. Cette évolution est directement liée à la croissance (en racine du temps) du halo de diffusion dans le milieu.

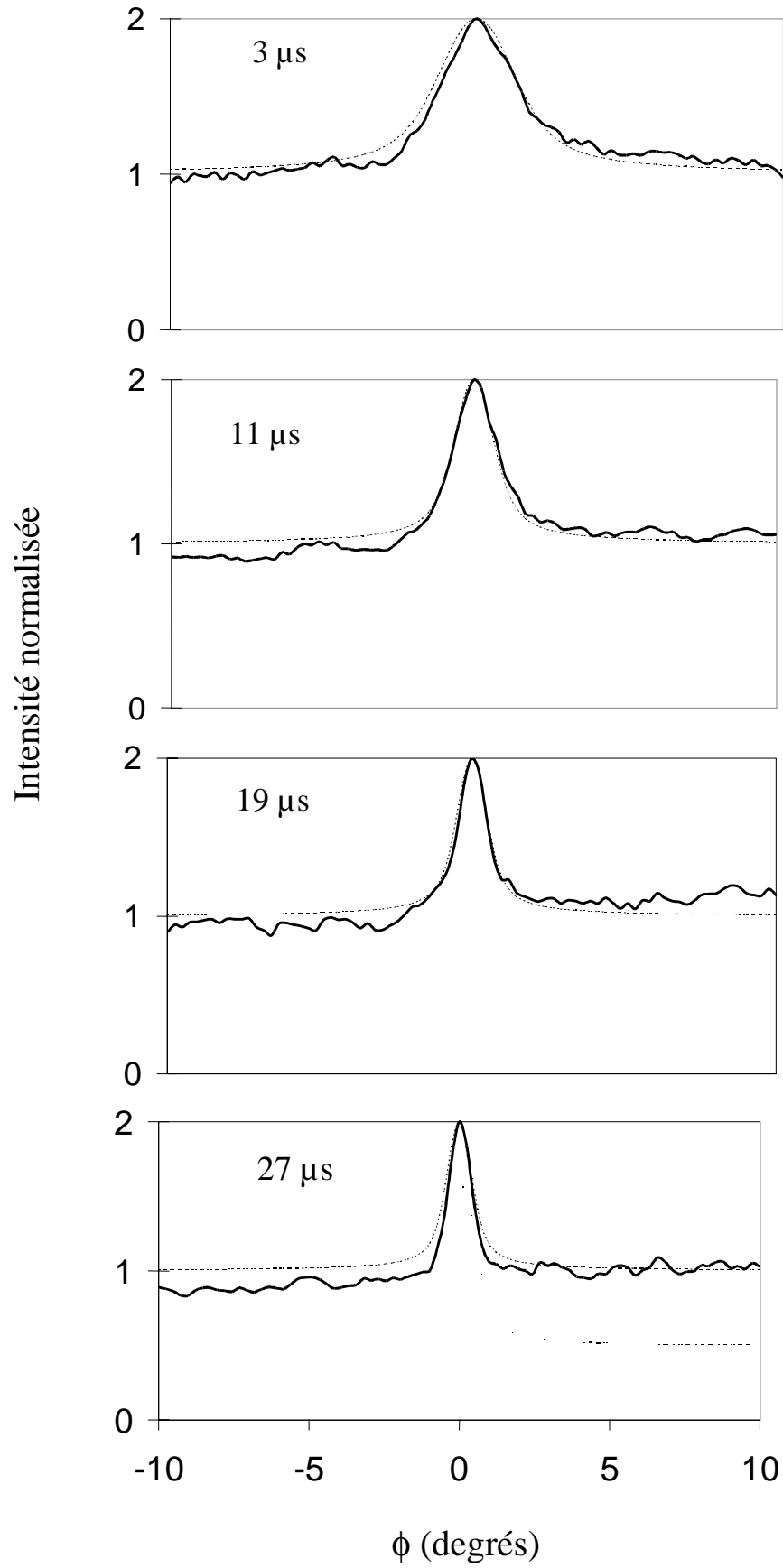


Fig. 5. Evolution temporelle du « cône dynamique »

2. Une explication heuristique

Décomposons en ondes planes le front d'illumination qui arrive sur l'échantillon et raisonnons sur un vecteur d'onde particulier \vec{k}_0 (Fig. 6). On cherche à évaluer l'intensité réfléchie dans la direction \vec{k} . Elle est le résultat du jeu complexe d'interférences entre tous les chemins possibles émergeant de l'échantillon avec la direction \vec{k} .

On note $A(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; t)$ l'amplitude au point \mathbf{r}_j pour un point source situé en \mathbf{r}_i (Fig. 6). L'intensité reçue dans la direction \vec{k} est alors donnée par :

$$I(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}) = \sum_{i,j,l,m} A(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) A^*(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_m) e^{i\mathbf{k}_0(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_l) + i\mathbf{k}(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_j)} \quad (1)$$

Cette somme peut être décomposée en trois termes [5] :

- Contribution du *speckle*

Considérons les deux chemins particuliers de la figure 6. Ces deux chemins « connaissent une vie différente » dans le milieu. Ils n'ont pas de relation de phase entre eux et n'ont donc aucune raison d'interférer constructivement. Sur cette réalisation particulière du désordre, ils vont contribuer au *speckle*, en donnant dans la direction \vec{k} une intensité

$$I_s(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}) = \sum_{(i,j) \neq (l,m)} A(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) A^*(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_m) e^{i\mathbf{k}_0(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_l) + i\mathbf{k}(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_j)} .$$

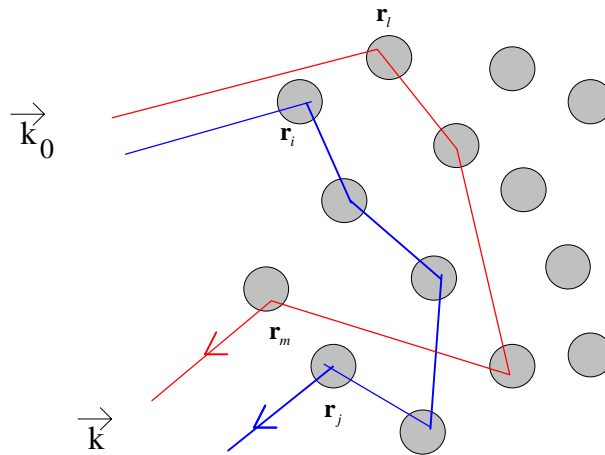


Fig. 6. Contribution du speckle à l'intensité moyenne rétrodiffusée

- Contribution incohérente

En moyenne, dans l'approximation de Boltzmann, seule va subsister, comme nous l'avons vu dans les deux premiers chapitres, la contribution incohérente résultant de l'interférence entre chemins qui ont suivi la même séquence de diffuseurs (Fig. 7), soit: $I(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}) = \sum_{(i,j)} |A(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)|^2$

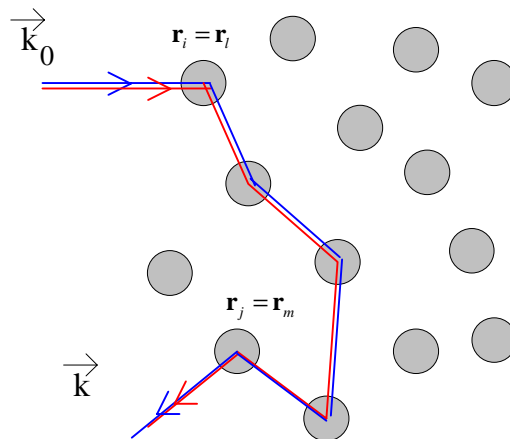


Fig. 7. Contribution incohérente à l'intensité rétrodiffusée

Cette contribution incohérente a le même poids quel que soit la direction d'observation \vec{k} . Elle va donc en moyenne donner un fond uniforme d'intensité.

- Contribution cohérente

Mais il existe des couples de chemin particuliers dont nous n'avons pas encore tenu compte. Considérons le chemin figuré en trait épais sur la figure 8. Si ce chemin existe, le chemin réciproque, c'est-à-dire le chemin qui emprunte la même séquence de diffuseurs mais dans une chronologie inverse (en trait fin sur la figure 8), existe également. Or, ces deux chemins sont exactement en phase dans la direction incidente d'illumination. Par conséquent, ils vont interférer constructivement dans cette direction.

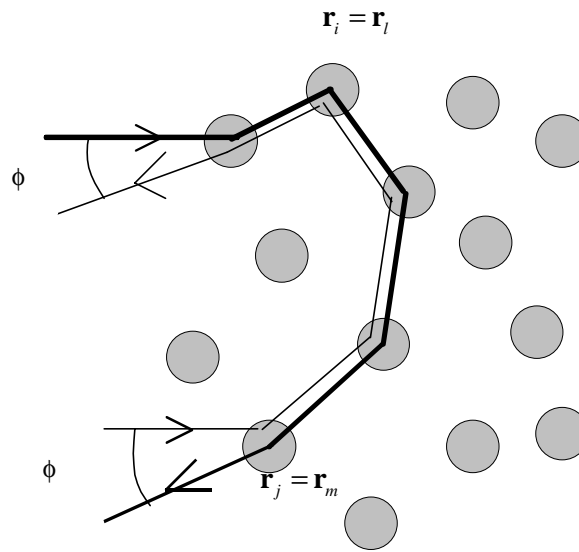


Fig. 8. Contribution cohérente à l'intensité rétrodiffusée.

Plus généralement, pour chaque réalisation du désordre, chaque chemin dans le milieu a un petit « frère », son réciproque, qui va interférer constructivement dans la direction incidente d'illumination, ce qui, en moyenne, donnera deux fois plus d'intensité que dans toutes les autres directions. Leur contribution à l'intensité est en effet donnée par :

$$I_c(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}) = \sum_{(i,j)} A(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) A^*(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i) e^{i(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k})(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} \text{ avec } A(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = A(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i).$$

Dans la direction $\vec{k} = -\vec{k}_0$, cette contribution est égale à l'intensité incohérente. Le rapport $\left\langle \frac{I_c + I_i}{I_i} \right\rangle$ vaut donc deux dans cette direction. Lorsque \vec{k} s'écarte de $-\vec{k}_0$, le déphasage est proportionnel à $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. Or nous avons vu qu'en régime stationnaire la distance

caractéristique dans un milieu multidiffuseur est le libre parcours moyen de transport l^* . On s'attend en particulier à ce que pour $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| > l^*$ les amplitudes ne puissent s'additionner de façon cohérente. La différence de marche typique entre deux rayons émergeant dans la direction ϕ avec la séparation $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ est donc de l'ordre de ϕl^* . Des interférences constructives entre ces deux rayons ne peuvent se produire que pour $\phi l^* < \lambda$, ce qui donne une largeur caractéristique du cône stationnaire de l'ordre de λ/l^* .

En régime dynamique, la longueur caractéristique est \sqrt{Dt} qui est une mesure de la taille transverse du halo. Avec le même raisonnement, on prévoit pour le cône dynamique une largeur de l'ordre de λ/\sqrt{Dt} .

L'effet de rétrodiffusion cohérente est donc une très belle conséquence de la réciprocité dans un milieu désordonné multidiffuseur. Certains auteurs invoquent plutôt *l'invariance par renversement du temps*. En réalité, l'invariance par renversement du temps réclame à la fois la réciprocité et la conservation de l'énergie comme nous le verrons dans le chapitre 4. Or, la réciprocité suffit à expliquer le cône de rétrodiffusion cohérente. Dans un milieu avec pertes, le facteur 2 sur l'intensité moyenne doit toujours être observé. Par contre, les chemins les plus longs étant les plus sensibles à la dissipation, la forme du cône, triangulaire autour du sommet pour un ordre de diffusion tendant vers l'infini, s'arrondit [4].

Nous allons voir qu'une théorie fondée sur un développement diagrammatique de l'intensité moyenne rétrodiffusée permet de déterminer les relations exactes liant la largeur du cône stationnaire au libre parcours moyen de transport et la largeur du cône dynamique à la constante de diffusion.

3. Calcul analytique

Nous avons choisi ici de détailler le calcul analytique complet du cône de rétrodiffusion cohérente. En effet, si la théorie en a déjà été faite en optique [5] dans l'espace des \vec{k} , le calcul

développé pour l'acoustique par Bart A. Van Tiggelen présente l'originalité d'être mené dans l'espace réel et donc de s'adapter à nos mesures expérimentales.

3.1. Cône dynamique

Compte tenu de la nature de la source (linéique) et de l'échantillon (collection de tiges parallèles), nous traitons le problème bidimensionnel. Les notations utilisées pour le calcul sont indiquées figure 9.

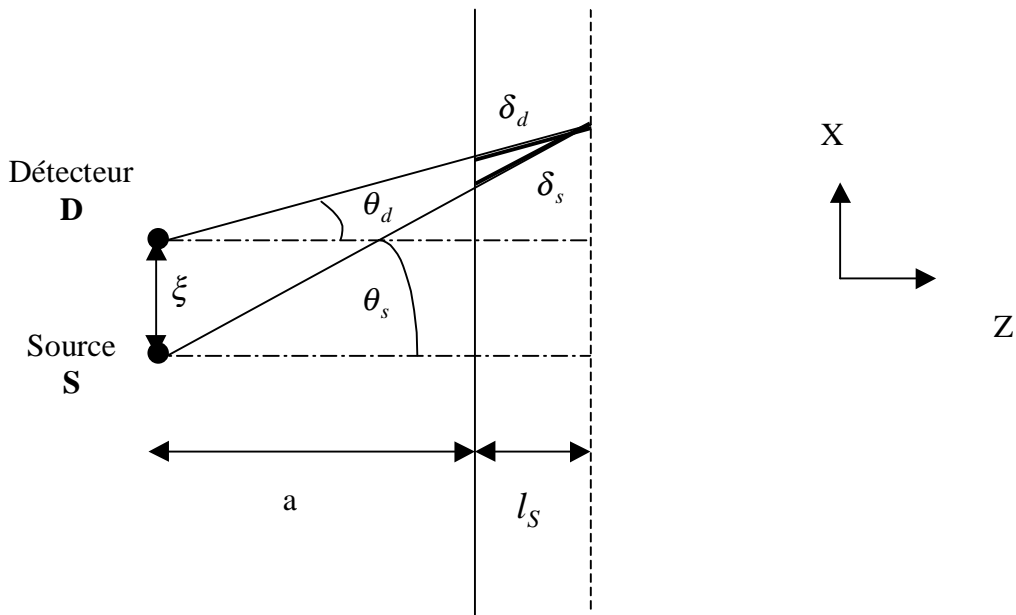


Fig. 9. Notations utilisées pour le calcul analytique de la forme du cône de rétrodiffusion cohérente

La fonction de Green en milieu homogène à deux dimensions s'écrit en champ lointain (cf. chapitre 1) :

$$G(x, z) = -\frac{1+i}{4\sqrt{\pi k}} \frac{e^{ik\sqrt{x^2+z^2}}}{(x^2+z^2)^{1/4}}$$

expression d'une onde cylindrique divergente depuis la ligne source.

Calcul de la fonction de Green moyenne

Nous faisons les trois hypothèses suivantes :

$$ka \gg 1$$

$$a \gg l_s$$

$$kl_s \gg 1$$

Les deux premières inégalités sont des hypothèses de champ lointain tandis que la troisième traduit le fait que nous sommes loin du régime de *localisation forte* pour lequel la constante de diffusion tendrait vers 0 [6].

La seconde inégalité permet d'écrire que d'un point situé dans la tranche d'épaisseur l_s , la source et le détecteur sont vus sous le même angle. La différence de marche typique dans la première tranche s'écrit en effet :

$$\delta_s - \delta_d = l_s (1/\cos\theta_s - 1/\cos\theta_d) \approx \frac{l_s}{a} \xi \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Or, nous rencontrerons plus loin dans le calcul des déphasages du type $k\xi \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ devant lesquels la différence de phase introduite dans la première tranche est négligeable si $a \gg l_s$.

De plus, sur un libre parcours moyen, la fonction de Green moyenne est atténuée par le facteur $e^{-z/2\mu_s}$ (cf. chapitres 1 et 2 pour les justifications théoriques et expérimentales) avec $\mu_i = \cos(\theta_i) = a/\sqrt{a^2 + x_i^2}$. Pour un point $\mathbf{r} = (x, z)$ appartenant à la première tranche d'épaisseur l_s , la fonction de Green moyenne s'écrit donc :

$$G(x, z) = -\frac{1+i}{4\sqrt{\pi k}} \frac{e^{ik\sqrt{x^2+a^2}}}{(a^2+x^2)^{1/4}} e^{-\frac{z}{2\mu_s}} \quad (2)$$

Calcul de la contribution incohérente

Nous avons vu dans le premier chapitre que l'intensité moyenne diffusée par un milieu aléatoire désordonné reçue sur le détecteur D pour une source située en S est donnée par:

$$|\Psi_i(S,D)|^2 = \iiint \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 G(S, \mathbf{r}_1) G^*(S, \mathbf{r}_3) \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) G(\mathbf{r}_2, D) G^*(\mathbf{r}_4, D) \quad (3)$$

où $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$ est le *vertex* réductible. Nous avons montré dans l'approximation de Boltzmann que le *vertex* est la somme infinie de diagrammes en échelles :

$$\begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \qquad \mathbf{r}_2 \\ \hline \quad \text{L} \quad \\ \hline \mathbf{r}_3 \qquad \mathbf{r}_4 \end{array} = \begin{array}{c} \times \\ | \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} \times \times \\ | \quad | \\ \times \times \end{array} + \begin{array}{c} \times \times \times \\ | \quad | \quad | \\ \times \times \times \end{array} + \begin{array}{c} \times \times \times \times \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \times \times \times \times \end{array} + \dots$$

et dans l'approximation de la diffusion :

$$\begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \qquad \mathbf{r}_2 \\ \hline \quad \text{L} \quad \\ \hline \mathbf{r}_3 \qquad \mathbf{r}_4 \end{array} = F_{2D}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4)$$

où le propagateur F_{2D} est directement proportionnel à la solution $P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t)$ de l'équation de la diffusion.

Avec les conditions aux limites $P=0$ pour $z_{1,2} = -z_0$ et $P=0$ pour $z_{1,2} = L + z_0$, $P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t)$ s'écrit (cf. chapitre 2, paragraphe 1.4.2) :

$$P(x_1 - x_2, z_1, z_2; t) = \frac{e^{-(x_1 - x_2)^2 / 4Dt}}{\sqrt{4\pi Dt}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2 \pi^2 Dt}{B^2}} \left[\begin{array}{c} \cos \frac{\pi m (z_1 - z_2)}{B} \\ -\cos \frac{\pi m (z_1 + z_2 + 2z_0)}{B} \end{array} \right] \quad (4)$$

avec $B = L + 2z_0$

On doit donc calculer l'intégrale :

$$|\Psi_i(S, D)|^2 = \frac{1}{(8\pi k)^2} \iiint dx_1 dx_2 dz_1 dz_2 e^{-z_1/\mu_1 l_s} e^{-z_2/\mu_2 l_s} F(x_1 - x_2, z_1, z_2; t)$$

Le calcul de l'intégrale sur z_1 et z_2 est fastidieux mais ne présente pas de difficulté particulière. Définissons le $m^{\text{ème}}$ coefficient de réflexion de μ_1 vers μ_2 :

$$L_m(\mu_1, \mu_2) = \frac{l_s^2}{1/(\mu_1 \mu_2)^2 + \left(\frac{l_s \pi m}{B}\right)^2 (1/\mu_1^2 + 1/\mu_2^2) + \left(\frac{l_s \pi m}{B}\right)^4} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{2 \sin^2(\pi m z_0 / B)}{\mu_1 \mu_2} [1 + e^{-L/l_s(1/\mu_1 + 1/\mu_2)} + (-1)^m (e^{-L/l_s \mu_1} + e^{-L/l_s \mu_2})] \\ & + 2 \cos^2(\pi m z_0 / B) \left(\frac{l_s \pi m}{B}\right)^2 [1 + e^{L/l_s(1/\mu_1 + 1/\mu_2)} - (-1)^m (e^{-L/l_s \mu_1} + e^{-L/l_s \mu_2})] \\ & + \frac{l_s \pi m}{B} \sin(2\pi m z_0 / B) [(1/\mu_1 + 1/\mu_2)(1 - e^{-L/l_s(1/\mu_1 + 1/\mu_2)}) + (-1)^m (1/\mu_1 - 1/\mu_2)(e^{-L/l_s \mu_1} - e^{-L/l_s \mu_2})] \end{aligned} \right\}$$

La contribution incohérente s'écrit finalement après le changement de variable :

$$\cos(\theta_i) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x_i^2}} :$$

$$|\Psi_i(S, D; t)|^2 = \frac{4kc}{(8\pi k^2)} \frac{1}{B} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_2 e^{-(\tan\theta_1 - \tan\theta_2)^2 \frac{a^2}{4Dt}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{\frac{-m^2 \pi^2 Dt}{B^2}} \frac{L_m(\mu_1, \mu_2)}{\mu_1 \mu_2} \quad (5)$$

Calcul de la contribution cohérente

Lorsque nous calculons le *vertex* dans l'approximation de Boltzmann, nous négligeons en particulier la somme infinie des diagrammes croisés :

Or, ce sont précisément ces diagrammes qui représentent l'interférence entre un chemin et son chemin réciproque. On peut écrire leur somme en fonction du propagateur F_{2D} .

D'où :

$$|\Psi_c(S,D;t)|^2 = \iiint \int dx_1 dx_2 dz_1 dz_2 \frac{e^{-z_1/\mu_1 l_s} e^{-z_2/\mu_2 l_s} e^{ik\sqrt{a^2+x_1^2}} e^{ik\sqrt{a^2+x_2^2}} e^{ik\sqrt{a^2+(x_1-\xi)^2}} e^{ik\sqrt{a^2+(x_2-\xi)^2}}}{\sqrt{a^2+x_1^2} \sqrt{a^2+x_2^2} \sqrt{a^2+(x_1-\xi)^2} \sqrt{a^2+(x_2-\xi)^2}} F(x_1-x_2, z_1, z_2; t)$$

Cette formule diffère de la contribution incohérente essentiellement par les facteurs de phase.

Avec $\xi \ll a$, le facteur de phase peut être linéarisé :

$$e^{ik\sqrt{a^2+X_1^2}} e^{ik\sqrt{a^2+X_2^2}} e^{ik\sqrt{a^2+(X_1-\xi)^2}} e^{ik\sqrt{a^2+(X_2-\xi)^2}} \approx e^{ik(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\xi}$$

La contribution cohérente se réécrit donc :

$$|\Psi_c(S,D;t)|^2 = \frac{4kc}{(8\pi k^2)} \frac{1}{B} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_2 e^{-(\tan\theta_1 - \tan\theta_2)^2 \frac{a^2}{4Dt}} \cos[(s_1 - s_2)k\xi] \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2\pi^2 Dt}{B^2}} \frac{L_m(\mu_1, \mu_2)}{\mu_1 \mu_2}$$

Sur la source ($\xi = 0$), les contributions cohérentes et incohérentes sont égales. Posons :

$$b = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_2 e^{-(\tan\theta_1 - \tan\theta_2)^2 \frac{a^2}{4Dt}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2\pi^2 Dt}{B^2}} \frac{L_m(\mu_1, \mu_2)}{\mu_1 \mu_2}$$

Finalement, la forme analytique du cône dynamique $C_d(\xi;t) = \frac{|\Psi_c(S,D;t)|^2 + |\Psi_i(S,D;t)|^2}{|\Psi_i(S,D;t)|^2}$ est

donc donnée par :

$$C_d(\xi,t) = 1 + \frac{1}{b} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_2 e^{-(\tan\theta_1 - \tan\theta_2)^2 \frac{a^2}{4Dt}} \cos[(s_1 - s_2)k\xi] \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2\pi^2 Dt}{B^2}} \frac{L_m(\mu_1, \mu_2)}{\mu_1 \mu_2} \quad (6)$$

On peut utiliser la formule telle quelle pour fitter nos courbes expérimentales. Nous présentons figure 10 la forme du cône dynamique en unités adimensionnées $a/k\sqrt{Dt}$ pour des valeurs des différents paramètres compatibles avec ceux de nos expériences.

$$a = 100mm$$

$$L = 80mm$$

$$l_s = 4mm$$

$$l^* = 4.8mm$$

$$t = 25\mu s$$

$$D = 3.2mm^2 / \mu s$$

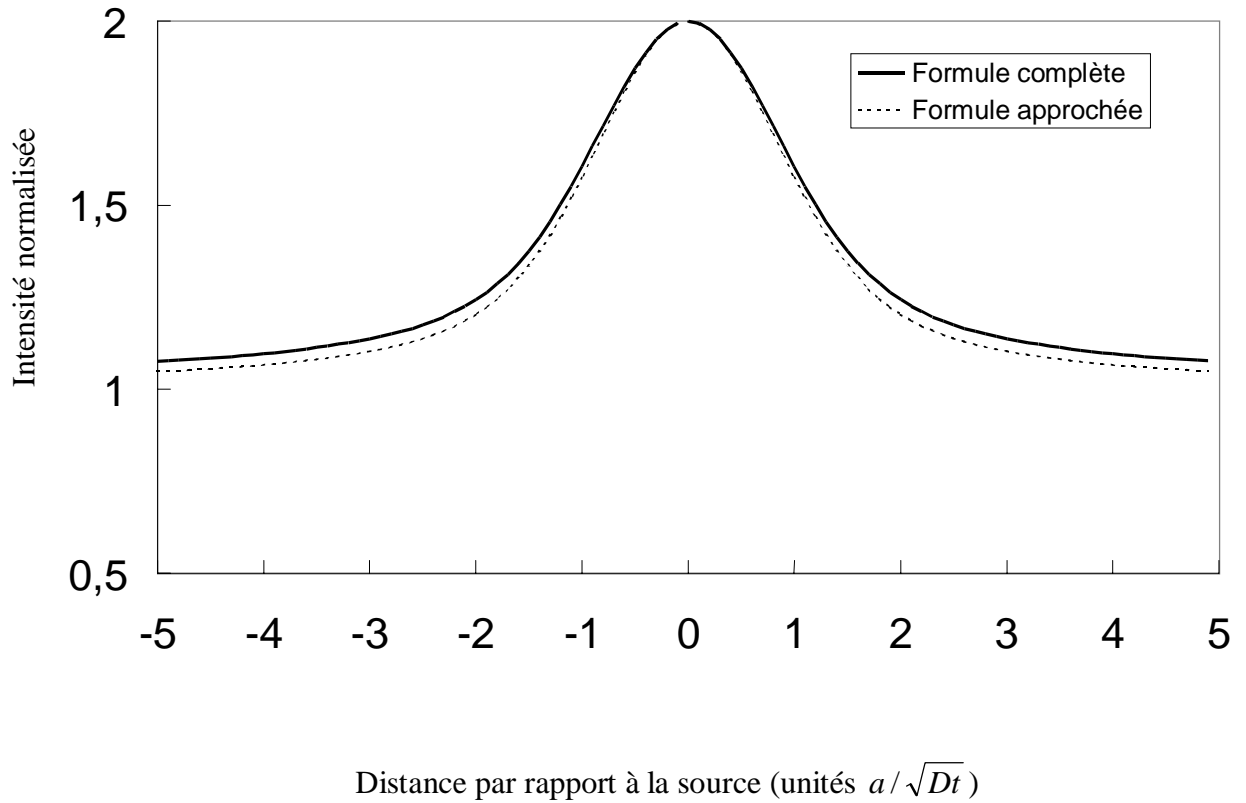


Fig. 10. Forme théorique du cône dynamique. La formule complète est issue de l'équation (6), la formule approchée de l'équation (7).

La demi - largeur à mi-hauteur du cône vaut $\Delta\xi = 1.2 \frac{a}{k\sqrt{Dt}}$.

Notons au passage que la forme du cône dynamique n'est pas sensible à l'introduction d'absorption dans le milieu. En effet, celle-ci se traduirait par l'ajout un facteur e^{-t/τ_a} dans le propagateur d'intensité F_{2D} . Mais celui ci apparaît à la fois au numérateur et au dénominateur de $C_d(\xi;t)$ si bien que les facteurs d'absorption se simplifient.

Il est intéressant d'aller plus loin dans les approximations pour attacher un sens physique à cette formule compliquée. Pour $t > \tau_{th} = \frac{B^2}{\pi^2 D}$, où τ_{th} définit le temps de *Thouless* (temps de traversée le plus probable de l'échantillon, cf. chapitre2), seul le premier coefficient de réflexion contribue et en tenant compte du fait que $B \gg 1$, $L_1(\mu_1, \mu_2) \rightarrow \frac{2\pi l_s^2}{B^2} (Z_0 + \mu_1)(Z_0 + \mu_2)\mu_1\mu_2$.

La formule se simplifie en :

$$|\Psi_c(S,D;t)|^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{(16)} \frac{C}{k} \frac{l_s^2}{\sqrt{t/\tau_{th}}} e^{-t/\tau_{th}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_2 e^{-(\tan\theta_1 - \tan\theta_2) \frac{a^2}{4Dt}} \cos[(s_1 - s_2)k\xi](z_0 + \mu_1)(z_0 + \mu_2)$$

Considérons deux cas :

1) Champ lointain

Nous avons vu dans le second chapitre que la longueur \sqrt{Dt} est reliée à la taille transverse du halo ultrasonore dans le milieu. Dans le cas, où $a^2 \gg 4Dt$, on peut supposer qu'une approximation de champ lointain est valide. Les angles θ_1 et θ_2 sont alors voisins et sous l'intégrale la principale contribution vient de l'exponentielle.

Ecrivons :

$$\tan\theta_1 - \tan\theta_2 \approx \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{\cos^2\theta}$$

$$\mu_1 - \mu_2 \approx -\sin\theta(\theta_1 - \theta_2)$$

$$s_1 - s_2 \approx \cos\theta(\theta_1 - \theta_2)$$

Avec le changement de variable $\Omega = \theta_1 - \theta_2$, la formule précédente se réécrit :

$$|\Psi(S,D;t)|_c^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{16} \frac{l_s^2}{B^4} \frac{c}{k} \frac{1}{(t/\tau_{th})^{1/2}} e^{-t/\tau_{th}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta e^{-\Omega^2 \frac{a^2}{4Dt \cos^4\theta}} \cos[\cos\theta k\xi](Z_0 + \cos\theta)^2$$

Après calcul de l'intégrale en Ω , il vient :

$$|\Psi(S,D;t)|_c^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{16} \frac{l_s^2}{B^3} \frac{c}{ka} e^{-t/\tau_{th}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos^2\theta (Z_0 + \cos\theta)^2 e^{-\frac{Dt \cos^4\theta [\cos\theta k\xi]}{a^2}}$$

On trouve donc en particulier que le pic, et donc également le fond incohérent, décroissent exponentiellement avec le temps. On s'attend par ailleurs à une largeur du cône qui varie en $a/k\sqrt{Dt}$.

La formule analytique approchée du cône en champ lointain s'écrit donc finalement :

$$C_d^{cl}(\xi; t) = 1 + \frac{1}{b} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta (Z_0 + \cos \theta)^2 e^{-\frac{Dt \cos^4 \theta [\cos \theta k \xi]}{a^2}} \quad (7)$$

avec $b = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta (Z_0 + \cos \theta)^2$

On a représenté sur la figure 10 la courbe correspondante. Cette fois, la largeur à mi-hauteur vaut $\Delta\xi = 1.12 \frac{a}{k\sqrt{Dt}}$. La différence avec la largeur de la courbe issue de l'équation (6) n'est pas négligeable puisqu'elle représente un écart de 15 % sur la valeur de la constante de diffusion.

2) Champ proche

En champ proche, c'est à dire pour $a^2 < 4Dt$, tous les angles comptent. Le terme exponentiel peut être négligé. On obtient alors :

$$C_d^{cp}(\xi; t) = 1 + \frac{1}{b} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_2 \cos[(s_1 - s_2)k\xi] (z_0 + \mu_1)(z_0 + \mu_2) \quad (8)$$

avec $b = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_2 (z_0 + \mu_1)(z_0 + \mu_2)$

La largeur typique du cône est alors $\Delta\xi \approx \frac{\lambda}{2\pi}$ (cf. figure 11), c'est-à-dire que l'on retrouve la limite fondamentale de résolution en termes de diffraction.

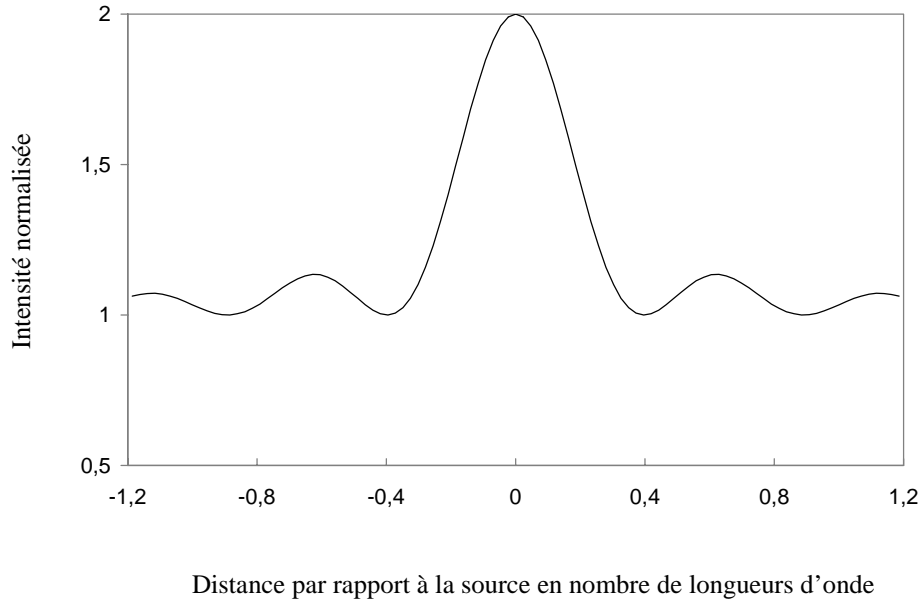


Figure 11 : Cône de rétrodiffusion cohérente en champ proche ($a^2 < 4Dt$).

Finalement, les simplifications opérées nous ont permis de trouver la loi de décroissance de l'intensité (cohérente et incohérente) et de retrouver la limite de résolution incompressible en champ proche. Cela étant, compte tenu de l'erreur faite dans la détermination de D , il vaut mieux utiliser la formule complète (6).

3.2. Cône stationnaire

Contribution incohérente

Il s'agit de calculer $\int_0^\infty |\Psi_i(S, D; t)|^2 dt$, intégrale sur le temps calculable analytiquement. On trouve :

$$\int_0^\infty |\Psi_i(S, D; t)|^2 dt = \frac{4kc}{(8\pi k)^2} \frac{2}{2D} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_2 \cos[(s_1 - s_2)k\xi] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B}{m} e^{-\frac{m\pi a |\tan\theta_1 - \tan\theta_2|}{B}} \frac{L_m(\mu_1, \mu_2)}{\mu_1 \mu_2}$$

De plus, comme $B/l^* \gg 1$, on peut définir la variable continue $p = \pi \frac{m}{B} l^*$. Le

$m^{\text{ème}}$ coefficient de réflexion se réécrit :

$$L_m(\mu_1, \mu_2) \rightarrow 2\mu_1\mu_2 p^2 l_s \frac{\left(\frac{\sin p\tau_0}{p} + \mu_1 \cos p\tau_0\right) \left(\frac{\sin p\tau_0}{p} + \mu_2 \cos p\tau_0\right)}{p^2 \mu_1^2 + 1} \frac{p}{p^2 \mu_2^2 + 1}$$

avec $\tau_0 = z_0/l^*$

On obtient alors pour la contribution incohérente :

$$\int_0^\infty |\Psi_i(S, D; t)|^2 = \frac{4kc}{(8\pi k)^2} \frac{2}{2\pi D} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_2 \int_0^\infty dp e^{-p(a/l^*)|\tan\theta_1 - \tan\theta_2|} p \frac{\left(\frac{\sin p\tau_0}{p} + \mu_1 \cos p\tau_0\right) \left(\frac{\sin p\tau_0}{p} + \mu_2 \cos p\tau_0\right)}{p^2 \mu_1^2 + 1} \frac{p}{p^2 \mu_2^2 + 1}$$

Le calcul de la contribution cohérente est analogue au cosinus sous l'intégrale près :

$$\int_0^\infty |\Psi_c(\mathbf{S}, \mathbf{D}; t)|^2 = \frac{4kc}{(8\pi k)^2} \frac{2}{2\pi D} \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_2 \int_0^\infty dp e^{-p(a/l^*)|\tan\theta_1 - \tan\theta_2|} p \cos[(s_1 - s_2)k\xi] \frac{\left(\frac{\sin p\tau_0}{p} + \mu_1 \cos p\tau_0\right) \left(\frac{\sin p\tau_0}{p} + \mu_2 \cos p\tau_0\right)}{p^2 \mu_1^2 + 1} \frac{p}{p^2 \mu_2^2 + 1}$$

Finalement, la formule analytique du cône de rétrodiffusion cohérente stationnaire s'écrit :

$$C_{st}(\xi) = 1 + \frac{1}{b} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_2 \int_0^\infty dp e^{-p(a/l^*)|\tan\theta_1 - \tan\theta_2|} p \cos[(s_1 - s_2)k\xi] \frac{\left(\frac{\sin p\tau_0}{p} + \mu_1 \cos p\tau_0\right) \left(\frac{\sin p\tau_0}{p} + \mu_2 \cos p\tau_0\right)}{p^2 \mu_1^2 + 1} \frac{p}{p^2 \mu_2^2 + 1} \quad (9)$$

avec :

$$b = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_2 \int_0^{\infty} dp e^{-p(a/l^*)|\tan\theta_1 - \tan\theta_2|} p \frac{(\frac{\sin p\tau_0}{p} + \mu_1 \cos p\tau_0)}{p^2 \mu_1^2 + 1} \frac{(\frac{\sin p\tau_0}{p} + \mu_2 \cos p\tau_0)}{p^2 \mu_2^2 + 1}$$

Contrairement au cas du cône dynamique, l'absorption peut a priori avoir un effet sur la largeur du cône. Elle introduit le facteur supplémentaire $\sqrt{1 + l^{*2} / \tau_a D}$ dans l'exponentielle de l'équation (9). Dans la pratique, compte tenu du temps caractéristique d'absorption dans notre milieu d'étude (cf. chapitre 2), la correction est complètement négligeable

Nous représentons Fig. 12 le cône de rétrodiffusion cohérente stationnaire théorique. en unités adimensionnées a/kl^* .

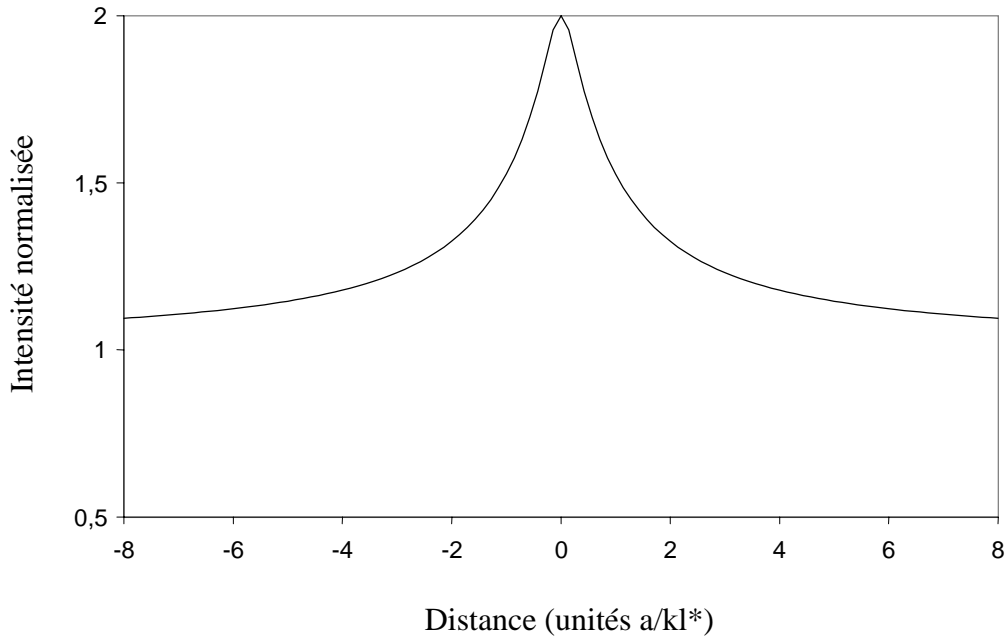


Fig. 12. Cône stationnaire théorique

La demi - largeur à mi-hauteur du cône vaut $\Delta\xi = 1.08 \frac{1}{kl^*}$.

Finalement, nous disposons donc de deux formules analytiques (6) et (9) prédisant la forme des cônes de rétrodiffusion cohérente stationnaires et dynamiques en acoustique.

4. Application de « l'effet de rétrodiffusion cohérente » à la détermination des propriétés de transport d'une onde acoustique dans un milieu aléatoire désordonné.

A l'origine, l'intérêt suscité par la mise en évidence expérimentale de l'effet de rétrodiffusion cohérente en physique du solide et en optique était essentiellement de nature théorique. C'était en effet, nous l'avons vu, la preuve des insuffisances de *l'approximation de Boltzmann* pour décrire la propagation d'une onde en milieu désordonné multidiffuseur. Par ailleurs, cet effet fournissait un mécanisme possible permettant d'expliquer la « renormalisation » de la constante de diffusion. La rétrodiffusion cohérente se traduit en effet par une augmentation de la probabilité de retour de l'onde vers son point source, phénomène qui peut être décrit par une décroissance de la constante de diffusion en fonction de l'épaisseur de matériau traversée. Autrement dit, la rétrodiffusion cohérente peut conduire à un régime où la constante de diffusion, grandeur traditionnellement intensive, devient extensive et tend éventuellement vers 0 lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini, signe de la *localisation d'Anderson* [7]. C'est pourquoi l'effet de rétrodiffusion cohérente est-il généralement associé au régime de *localisation faible*.

Pour nous, acousticiens et expérimentateurs, l'apport de cet effet est également de nature pratique. Il est assez aisé de l'enregistrer en utilisant des réseaux de transducteurs piézo-électriques. Par ailleurs, nous disposons à présent de formules quantitatives reliant la largeur du cône de rétrodiffusion cohérente aux paramètres de transport d'une onde ultrasonore dans un milieu désordonné multidiffuseur. Nous avons donc une méthode supplémentaire pour caractériser un tel milieu, méthode que l'on peut comparer aux mesures réalisées en « transmission » présentées au chapitre précédent.

4.1. Paramètres de transport pour « l'échantillon prototype ».

Le fit du cône stationnaire expérimental (figure 3) par l'équation (9) fournit $l^* = 4.7mm$, valeur en bon accord avec l'estimation du chapitre 2, corrigée des effets de l'absorption, $l^* = 4.8mm$.

L'équation (6) indique que la largeur du cône de rétrodiffusion cohérente évolue avec le temps en suivant la loi $\Delta\xi(t) = 1.2/k\sqrt{Dt}$. Effectivement, dans une échelle Log-Log, les points

expérimentaux s'alignent sur une droite de pente proche de $\frac{1}{2}$ (Fig. 13.). La valeur de l'ordonnée à l'origine fournit $D = 3.2 \text{ mm}^2 / \mu\text{s}$.

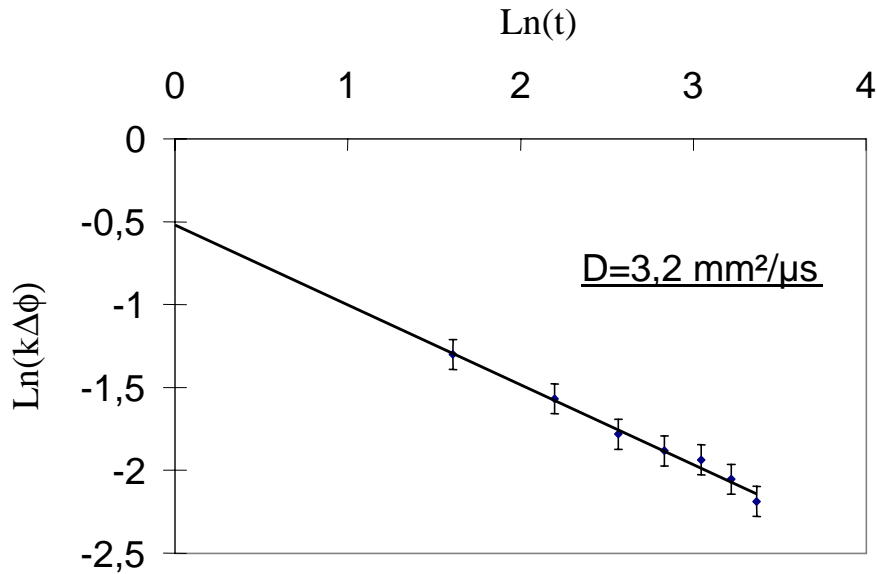


Fig. 13. Evolution de la largeur du cône de rétrodiffusion cohérente en fonction du temps

Ces valeurs du libre parcours moyen de transport et de la constante de diffusion conduisent à une estimation de la vitesse de transport $V_E = 1.3 \text{ mm} / \mu\text{s}$ inférieure à la vitesse de phase dans l'eau.

4.2. Cône de rétrodiffusion cohérente dans un nuage de bulles

Des études théoriques [8] présentent les réseaux de bulles d'air comme le candidat idéal pour la *localisation d'Anderson* en acoustique. En effet, compte tenu de la différence de compressibilité entre l'air et l'eau, la section efficace de diffusion d'une bulle d'air peut atteindre jusqu'à 10^5 fois sa section géométrique. On peut donc espérer se rapprocher du critère de Ioffe-Regel $kl_s \approx 1$ caractéristique de la localisation d'Anderson [6].

Ce maximum dans la section efficace est atteint pour des bulles beaucoup plus petites que la longueur d'onde qui explore le milieu. Pour la fréquence de 1 MHz, le maximum est en effet atteint pour une taille de bulle d'environ $10 \mu\text{m}$ [9].

Cependant, deux difficultés majeures ont empêché jusqu'à présent toute vérification expérimentale des prédictions concernant une possible localisation de l'onde acoustique dans un tel milieu.

D'un point de vue pratique, il n'est pas évident de stabiliser un réseau de bulles pendant le temps de l'expérience.

D'un point de vue théorique, la section efficace d'absorption d'une bulle est atteinte pour la même fréquence que sa section efficace de diffusion. Par conséquent, la mise en évidence de la décroissance exponentielle de l'intensité transmise dans le nuage ne serait pas une preuve suffisante d'un phénomène de localisation d'Anderson. Elle pourrait aussi bien être le signe d'un mécanisme d'absorption. Cela étant, il n'en demeure pas moins vrai que la diffusion multiple d'une onde acoustique dans un réseau de bulles est en soi un intéressant sujet d'étude tant pratique que théorique. Notons par exemple que les nuages de bulles créées par cavitation à la surface des sonars sont une sérieuse limitation pour les techniques d'écoute sous marine. Nous verrons dans le prochain chapitre que le retournement temporel dans un tel milieu est une méthode qui peut permettre de s'affranchir (voire de profiter) de sa complexité.

Pour ce qui nous concerne, nous nous sommes contentés d'essayer d'enregistrer « l'effet de rétrodiffusion cohérente » dans un nuage de bulles produit au moyen de céramiques poreuses dans lesquelles on injecte de l'air pulsé (cf. montage expérimental Fig. 14). Un dérivateur permet d'utiliser de une à cinq céramiques et par la même de faire varier l'épaisseur de l'échantillon entre 3 et 15 mm. L'ajout de sel dans l'eau de la cuve, à raison de 10 g/l permet d'obtenir des bulles submillimétriques. Le montage utilisé pour enregistrer le cône est le même que celui présenté au début de ce chapitre (Fig. 1) .

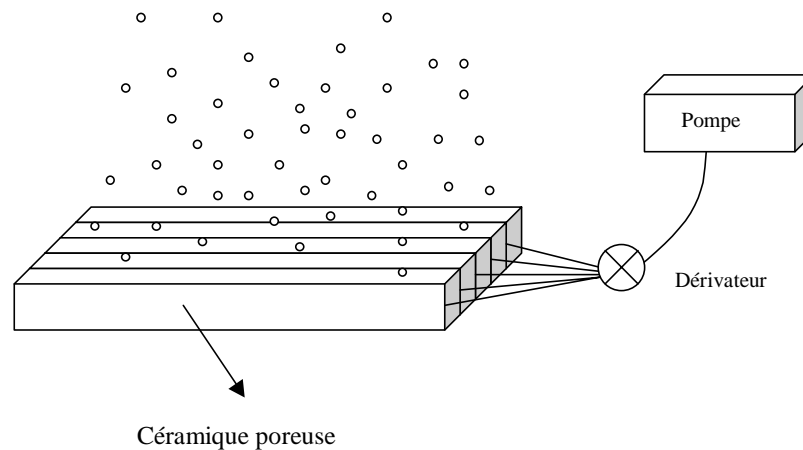


Fig. 14. Montage expérimental pour l'enregistrement du cône de rétrodiffusion cohérente sur un rideau de bulles

La vitesse de montée des bulles est telle que la réciprocité n'est pas brisée ; un chemin et son réciproque voient la même séquence de diffuseurs. Par contre, à chaque nouveau tir, c'est à dite toutes les m_s , le réseau de transducteurs « voit » une nouvelle réalisation du désordre. On

profite donc de la montée des bulles pour moyenner sur le désordre. Nous présentons figure 15 la répartition de l'intensité stationnaire moyennée sur 1000 réalisations.

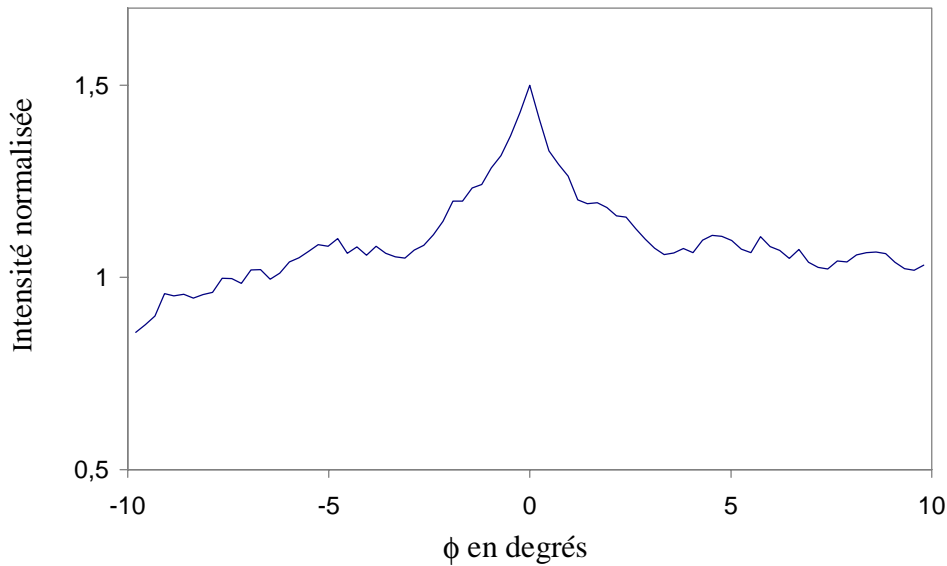


Fig. 14. Cône de rétrodiffusion cohérente stationnaire dans un réseau de bulles submillimétriques

Nous n'obtenons pas un facteur 2 ce qui indique que le poids de la diffusion simple reste trop important par rapport à la contribution de la diffusion multiple. Des mesures en transmission confirment que les ordres de diffusion mis en jeu sont limités (une dizaine au maximum).

4.3. Caractérisation d'aciers austénitiques à gros grains

Certains aciers austénitiques utilisés pour construire les cuves de réacteur des centrales nucléaires ont des tailles de grain de l'ordre du millimètre, c'est-à-dire de l'ordre de la longueur d'onde généralement utilisée pour leur inspection. Ils sont donc très multidiffuseurs et leur contrôle destructif s'avère d'ailleurs très délicat voire impossible [10].

L'effet de rétrodiffusion cohérente peut être une bonne solution pour sinon véritablement détecter des défauts, du moins dans un premier temps caractériser un tel acier en termes moyens. Nous avons donc testé la méthode sur deux aciers que nous nommerons 1 et 2.

Acier n°1

L'échantillon n°1 est un bloc d'acier austénitique de dimensions $120 \times 120 \times 60 \text{ mm}$. Nous présentons Fig. 15 un exemple des signaux réfléchis par cet échantillon lorsqu'il est illuminé par

une onde plane produite par le réseau de 128 transducteurs émettant 5 arches de sinusoïde à 3.2 MHz.

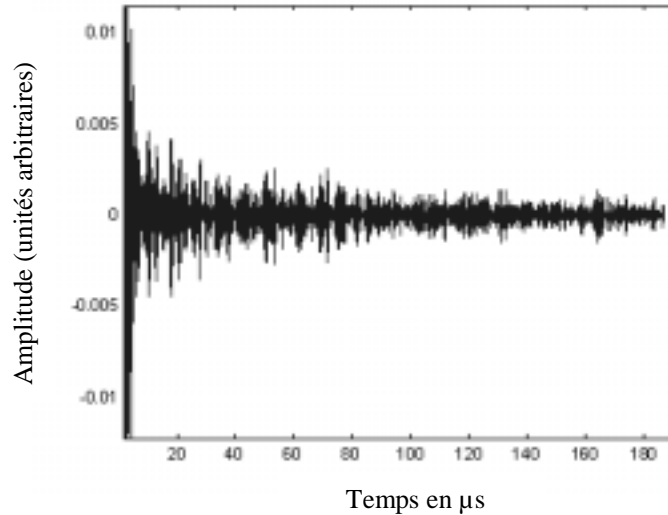


Fig. 15. Signal reçu sur le transducteur #64. On a saturé l'amplitude de l'écho d'interface pour faire ressortir les signaux diffusés. On ne distingue pas d'écho de fond.

Le signaux ressemblent, à s'y méprendre, à ceux enregistrés sur notre échantillon de tiges. Pourtant, en rétrodiffusion, leur longueur n'est pas la preuve formelle de l'existence de diffusions multiples. L'absence d'un écho de fond semble tout de même indiquer une atténuation importante dans l'échantillon. Mais celle-ci peut être aussi bien due à un phénomène de dissipation qu'à la présence de diffusion multiple. De manière générale, il est d'ailleurs très difficile de faire la part respective des deux mécanismes dans l'atténuation. L'enregistrement du cône de rétrodiffusion cohérente peut apporter une réponse.

A cette fin, nous avons utilisé le montage expérimental présenté Fig. 1 en remplaçant l'échantillon de tiges par le bloc d'acier. La première interface eau/acier réfléchit 90 % de l'onde ultrasonore émise par le transducteur #64. Il est facile de s'affranchir de cet écho spéculaire en sélectionnant une fenêtre d'intégration qui ne le contient pas ou en inclinant le réseau par rapport à l'échantillon pour le renvoyer hors du champ de réception.

Cependant, l'énergie réellement transmise dans l'échantillon est assez faible. Or, dans la configuration qui est la nôtre, notre source est forcément l'un des éléments de notre réseau de transducteurs. La seule façon d'envoyer beaucoup d'énergie est de jouer sur la durée du signal en envoyant un train d'ondes quasi monochromatique (40 arches de sinusoïdes à 3.5 MHz) auquel cas il devient difficile d'enregistrer l'effet dynamique. Nous présentons Fig. 15 le résultat obtenu

en intégrant l'énergie sur une fenêtre excluant l'écho d'interface et en moyennant sur 40 positions du réseau de transducteurs par rapport à l'échantillon.

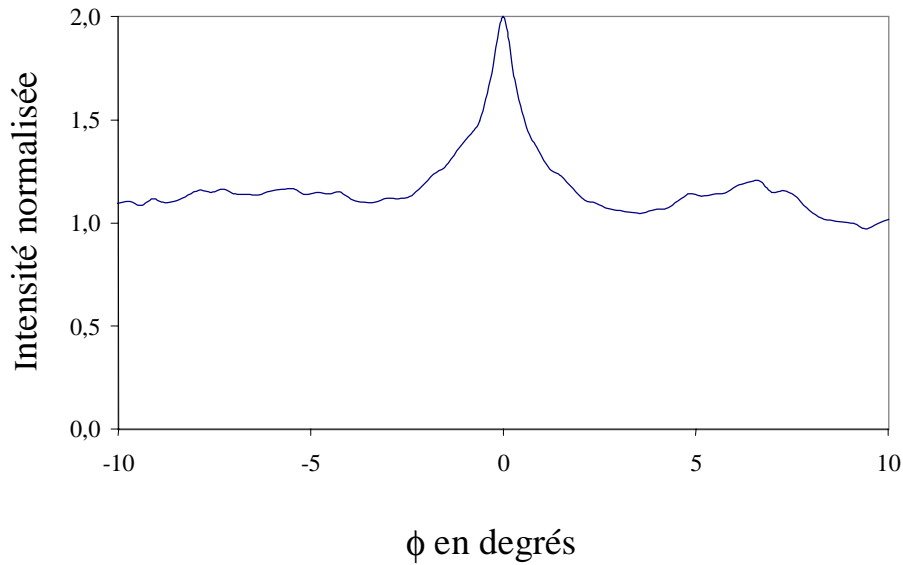


Fig. 15. Cône de rétrodiffusion cohérente stationnaire enregistré sur un acier austénitique (échantillon n°1).

Nous obtenons bien à peu près un rapport deux entre le pic et le fond d'intensité signe d'un régime de diffusion multiple.

Une utilisation quantitative de cet effet suppose d'intégrer dans le calcul théorique la réfraction à l'interface eau - acier. Il sera alors possible de déterminer un libre parcours moyen de transport caractéristique de la microstructure de l'échantillon.

Acier n°2

L'acier n°2 de microstructure connue est anisotrope. Il est constitué de grains millimétriques de forme allongée dans une direction. Nous avons enregistré l'effet de rétrodiffusion cohérente pour un faisceau ultrasonore perpendiculaire ou parallèle à la microstructure (Fig. 16).

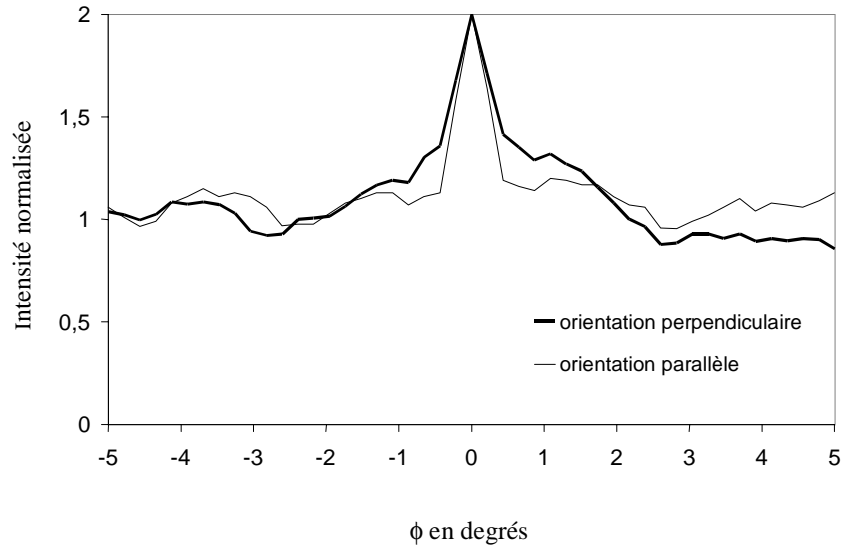


Fig. 16. Cône de rétrodiffusion cohérente stationnaire enregistré sur un acier hétérogène anisotrope (échantillon n°2) pour deux orientations du faisceau ultrasonore incident par rapport à la microstructure.

Le cône est plus large pour l'orientation perpendiculaire, signe d'un libre parcours moyen de transport plus petit. Ce résultat est logique. La taille des grains vue dans cette direction par le faisceau ultrasonore est plus grande et la diffusion d'autant plus importante.

Finalement, le cône de rétrodiffusion cohérente peut donc être un moyen intéressant de caractériser un matériau hétérogène présentant de la diffusion multiple (taille de grains, anisotropie) ou encore de mesurer la part respective de la diffusion et de l'absorption dans l'atténuation globale. Deux méthodes s'offrent à nous :

Nous avons vu que la largeur du cône stationnaire, pour un échantillon donné, est moins sensible à l'absorption que les mesures de l'amplitude moyenne réalisées en transmission. Si l'on connaît par ailleurs la section efficace totale des hétérogénéités, on peut déduire du libre parcours moyen de transport mesuré par le biais de l'enregistrement du cône, un libre parcours moyen élastique. La comparaison avec la mesure du libre parcours moyen déduit de mesures de l'amplitude en transmission est alors un moyen d'accéder au libre parcours moyen d'absorption.

Si la section efficace des diffuseurs est inconnue mais que l'enregistrement du cône dynamique est possible, on peut utiliser la constante de diffusion trouvée par cette méthode pour fitter les courbes d'intensité transmise et en déduire le temps caractéristique d'absorption (cf. chapitre 2).

REFERENCES

- ¹ M.P. van Albada and A. Lagendijk, Phys. Rev. Lett. **55**, 2692 (1985)
- ² E. Wolf and G. Maret, Phys. Rev. Lett **55**, 2696 (1985)
- ³ A. Tourin, A. Derode, P. Roux, B. A. van Tiggelen, and M. Fink, Phys. Rev. Lett **79**, 3637 (1997).
- ⁴ E. Akkermans, P. E. Wolf, and R. Maynard, Phys. Rev. Lett **56**, 1471 (1985).
- ⁵ E. Akkermans, P. E. Wolf, R. Maynard and G. Maret, J. Phys. **49**, 77 (1988).
- ⁶ B.A. van Tiggelen, “Multiple Scattering and Localization of Light, p. 77, Ph. D. Thesis, University of Amsterdam (1992).
- ⁷ P. W. Anderson, “Absence of Diffusion in Certain Random Lattices”, Phys. Rev. Lett. **109**, 1492 (1958).
- ⁸ D. Sornette, B. Souillard, Europhys. Lett., **7**, 269 (1988)
- ⁹ T.G. Leighton, “The Acoustic Bubble”, Academic Press (1994).
- ¹⁰ J.M. Bordier, M. Fink, A. Le Brun, and F. Cohen-Tenoudji, “The influence of Multiple Scattering in Incoherent Ultrasonic Inspection of Coarse Grain Stainless Steel”, Proc. 1991 Ultrasonics Symposium., vol. **2**, pp. 803-808.

Chapitre 4

Diffusion multiple et réversibilité

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les conséquences de la réciprocity sur la répartition angulaire de l'intensité moyenne rétrodiffusée par un échantillon aléatoire multidiffuseur. L'effet de rétrodiffusion cohérente que nous avons présenté illustre l'insuffisance de l'équation de la diffusion pour rendre compte de tous les aspects de la propagation d'une onde ultrasonore en milieu multidiffuseur.

Dans ce chapitre, nous mettons en évidence une autre propriété remarquable d'une onde ultrasonore se propageant dans un tel milieu : sa réversibilité, propriété qui n'est pas non plus prévue dans l'approximation de la diffusion. En effet, si l'équation de la diffusion qui porte sur la moyenne d'ensemble de l'intensité n'est pas invariante par renversement du temps, l'équation qui régit la propagation au niveau microscopique l'est.

Dans les deux premiers paragraphes, nous discutons plus généralement de la possibilité de réaliser une expérience de retournement temporel pour une onde ultrasonore, expérience que l'extrême sensibilité aux conditions initiales de la mécanique classique empêche de réaliser avec des particules. Nous présentons en particulier le retournement temporel comme un outil d'investigation du chaos.

Dans le troisième paragraphe, nous mettons en évidence expérimentalement la réversibilité d'une onde ultrasonore dans un milieu multidiffuseur. En utilisant un miroir à retournement temporel (MRT), nous montrons en effet qu'il est possible de la faire reconverger sur la source qui lui a donné naissance.

Dans le quatrième paragraphe, nous étudions expérimentalement les effets d'une perturbation de l'onde retournée temporellement sur la qualité de la focalisation et de la recompression temporelle au point source. En particulier, nous présentons des expériences dynamiques où une partie seulement du signal est retourné temporellement. Nous montrons que la focalisation s'affine lorsque la fenêtre de retournement temporel est choisie loin dans le signal multidiffusé. Par ailleurs, pour des épaisseurs importantes du milieu multidiffuseur, nous montrons qu'augmenter indéfiniment la taille du MRT au delà d'une certaine limite n'apporte plus d'amélioration au rapport signal sur bruit obtenu au point source. Cet effet de saturation est

relié à l'existence de corrélations dans les contributions de chaque capteur au retournement temporel. Enfin, nous montrons que la quantification sur 1 bit de l'onde retournée temporellement permet d'augmenter l'amplitude au point source.

Dans la cinquième et dernière partie, nous étudions l'influence d'une modification du milieu avant l'émission de l'onde retournée temporellement. Nous étudions en particulier l'influence d'une évolution de la température sur la compression temporelle au point source.

1. Réversibilité et chaos

1.1. La réversibilité en physique

L'idée de la réversibilité d'un processus peut être illustrée par l'expérience de pensée suivante. Un bloc de matière explose en de multiples fragments. A un instant donné, on arrête chacun des fragments en mesurant leur vecteur vitesse et on les renvoie avec le vecteur vitesse opposé. On voit alors les fragments converger vers leur point d'origine et reformer le bloc initial comme si le film était passé à l'envers. Conceptuellement, cette expérience est rendue envisageable par l'invariance par renversement du temps des équations gouvernant le mouvement de chacune des particules. Dans la pratique, une telle expérience s'avère impossible du fait de l'extrême sensibilité aux conditions initiales de la mécanique classique. En effet, si l'on commet une erreur, si infime soit elle, dans la définition du vecteur vitesse de l'une des particules, cette erreur se propage exponentiellement avec le temps interdisant par la même la reconstitution du bloc initial.

En physique ondulatoire, il en va tout autrement. En effet, la quantité d'information nécessaire à décrire complètement un champ ondulatoire est nécessairement limitée, dans la pratique par la plus petite longueur d'onde qu'il contient. Une précision infinie n'est donc pas requise comme en mécanique classique pour définir les conditions nécessaires à créer la scène inverse. Par ailleurs, la linéarité de l'opérateur d'évolution d'un champ ondulatoire implique qu'une erreur commise dans la définition du champ retourné temporellement se propage indépendamment du champ parfaitement retourné temporellement. En particulier, l'erreur ne s'amplifie pas au cours du temps. Une expérience de retournement temporel est donc a priori possible avec les ondes. Nous allons voir dans ce chapitre que les ondes ultrasonores se prêtent tout particulièrement à une telle expérience même dans des milieux fort complexes multidiffuseurs.

La moindre sensibilité aux conditions initiales de la physique ondulatoire trouve donc sa manifestation dans la possibilité de réaliser une expérience de renversement du temps pour les ondes. Dès lors, le retournement temporel peut apparaître comme un outil de diagnostic du chaos.

1.2. Le retournement temporel comme outil d'investigation du chaos

Les théoriciens du chaos s'intéressent tout particulièrement au passage chaos classique / chaos quantique. Dans cette optique, un certain nombre de critères ont été définis afin de caractériser numériquement l'évolution dans le temps d'états, classiques ou quantiques, initialement « voisins ».

En mécanique quantique, le critère d'évolution souvent retenu est le suivant. Dans le formalisme bracket, on considère deux états quantiques $|\Psi_1(0)\rangle$ et $|\Psi_2(0)\rangle$ dont l'évolution est gouvernée par l'équation de Schrödinger :

$$H|\Psi_{i=1,2}\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}|\Psi_{i=1,2}\rangle$$

Leur produit scalaire $\langle\Psi_1(t)|\Psi_2(t)\rangle$ est une mesure de leur « degré de ressemblance ». Il vaut 1 si les deux états sont parfaitement identiques. S'ils diffèrent peu, leur produit scalaire est proche de 1.

Supposons donc que ces deux états sont initialement proches, c'est-à-dire que $\langle\Psi_1(0)|\Psi_2(0)\rangle = 1 - \varepsilon$. La dérivée temporelle du produit scalaire s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\langle\Psi_1(t)|\Psi_2(t)\rangle = \left(\frac{d}{dt}\langle\Psi_1(t)|\right)|\Psi_2(t)\rangle + \langle\Psi_1(t)|\frac{d}{dt}|\Psi_2(t)\rangle$$

Or,

$$\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}H|\Psi(t)\rangle \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\langle\Psi(t)| = \frac{i}{\hbar}\langle\Psi(t)|H^*$$

$$H \text{ étant un opérateur hermitique, } \frac{i}{\hbar}\langle\Psi(t)|H^* = \frac{i}{\hbar}\langle\Psi(t)|H$$

$$\text{Finalement } \frac{d}{dt}\langle\Psi_1(t)|\Psi_2(t)\rangle = 0$$

La dérivée temporelle du produit scalaire est nulle. A un instant t ultérieur, les deux états sont donc toujours aussi proches au sens du produit scalaire. Cet argument est souvent invoqué

pour justifier la faible sensibilité aux conditions initiales de la mécanique quantique. Mais si l'on veut bien voir que la mécanique classique n'apparaît en définitive que comme un cas particulier de la mécanique quantique (elle en est la limite asymptotique pour $\hbar \rightarrow 0$), ce même argument devrait également pouvoir être avancé comme preuve de la non sensibilité aux conditions initiales de la mécanique classique. Là réside en fait un problème conceptuel soulevé récemment [1]. L'ambiguïté n'est qu'apparente.

Revenons en effet à la définition du chaos classique. L'extrême sensibilité aux conditions initiales d'un système signifie que deux orbites initialement proches dans l'espace des phases divergent exponentiellement avec le temps. Mais, en mécanique quantique, la notion de trajectoire définie n'a plus de sens. Par nature, l'interprétation de la mécanique quantique est probabiliste si bien que la définition du chaos classique n'est pas immédiatement transposable dans le formalisme de la mécanique quantique.

Dès lors, une description classique équivalente (de nature probabiliste) est plutôt fondée sur l'équation de Liouville à laquelle obéit la distribution de probabilité $\rho(q, p, t)$ des états dans l'espace des phases [2] :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(q, p, t) = -\frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} \rho(q, p, t) - F(q) \frac{\partial}{\partial p} \rho(q, p, t) \quad (1)$$

q et p sont les notations abrégées pour les positions q_1, \dots, q_f et les quantités de mouvement p_1, \dots, p_f définissant la position d'un système mécanique à f degrés de libertés dans l'espace des phases. m désigne la masse, et F un champ de forces.

On peut montrer que ρ est stationnaire le long d'une trajectoire. C'est le théorème de Liouville qui se traduit par l'égalité $\frac{d\rho}{dt} = 0$ [1].

Par conséquent, le produit scalaire de deux distributions de probabilité $\iint \rho_1(q, p, t) \rho_2(q, p, t) dq dp$ ne dépend pas non plus du temps. Ce n'est pas pour autant dire que la mécanique classique n'est pas sensible aux conditions initiales. Simplement, le critère fondé sur le calcul du produit scalaire de deux états dont l'évolution est gouvernée par le même hamiltonien n'est pas un critère adéquat.

Deux critères de comparaison plus pertinents semblent pouvoir être retenus [1] :

1) Le premier consiste à suivre l'évolution dans le temps du produit scalaire de deux états, classiques d'une part, quantiques d'autre part, dont les évolutions sont régies respectivement par les hamiltoniens H et $H + \delta H$ où δH désigne une petite perturbation.

2) L'autre est fondé sur une expérience numérique de retournement temporel. Un état $|\Psi(0)\rangle$ est propagé sur un temps T , perturbé puis retourné temporellement et repropagé. L'idée est d'étudier la probabilité de retour sur l'état initial en fonction de la valeur de la perturbation et du temps de propagation, soit la quantité :

$$P(T, \delta q) = \left| \langle \Psi(0) | U(-T) D(\delta q) U(T) | \Psi(0) \rangle \right|^2 \quad (2)$$

U étant le propagateur et D l'opérateur définissant la perturbation.

Nous allons voir dans la suite que l'acoustique ultrasonore est un domaine où la transposition expérimentale de ces idées est possible et peut apporter un éclairage nouveau.

2. Réversibilité des ondes ultrasonores et miroirs à retournement temporel

2.1. Réciprocité et réversibilité

La propagation d'une onde acoustique en milieu hétérogène non dissipatif est gouvernée par l'équation :

$$\Delta P(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = -(\nabla \log \rho \cdot \nabla) P(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) \quad (3)$$

où $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)$ est la pression instantanée au point \mathbf{r} . Cette équation présente la propriété d'être *invariante par renversement du temps*. En effet, si $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)$ est solution, $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, -t)$ l'est également. Cette propriété implique que pour toute onde divergente $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)$, il existe une onde $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, -t)$ qui converge vers sa source acoustique.

En utilisant une approche matricielle, Jean-Louis Thomas [2] a montré que *la réversibilité* est équivalente à la propriété de *réciprocité spatiale* si le milieu est en plus non dissipatif.

La condition de réciprocité spatiale est donc nécessaire mais pas suffisante à assurer la réversibilité d'un champ ondulatoire. Nous avons vu dans le chapitre 2 que la propriété de réciprocité spatiale est à l'origine de l'effet de rétrodiffusion cohérente dans les milieux multidiffuseurs. Nous avons noté en particulier que cet effet subsiste en milieu dissipatif, autrement dit lorsque l'invariance par renversement du temps est brisée.

La réversibilité d'un milieu conjuguée à la faible sensibilité aux conditions initiales d'un champ ondulatoire autorise donc a priori la réalisation d'une expérience de retournement temporel pour les ondes. Dans la pratique, les ondes ultrasonores s'avèrent plus particulièrement appropriées. On dispose en effet en acoustique de transducteurs piézo-électriques réversibles, capables de jouer indifféremment les rôles de microphones et de haut parleurs, et de suivre l'évolution temporelle du champ de pression.

Dès lors une expérience de retournement temporel parfait consisterait à :

- 1) enregistrer le champ de pression $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)$ en tout point de l'espace à l'instant t .
- 2) synthétiser en chacun de ces points le nouveau champ de pression $P(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, -t)$, retourné temporel du champ enregistré.
- 3) émettre en chacun des points $P(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, -t)$

Dans la pratique, l'enregistrement du champ de pression en tout point de l'espace est bien entendu impossible. Mais le théorème intégral d'Helmholtz et Kirchhoff stipule que la connaissance d'un champ ondulatoire et de sa dérivée normale sur une surface fermée suffit à déterminer complètement le champ en tous points du volume englobé par cette surface [3]. Ce principe est à l'origine de l'idée de la *cavité à retournement temporel*.

2.2. La cavité à retournement temporel

Une cavité à retournement temporel est une cavité fermée, tapissée de capteurs acoustiques, qui contient le point source sur lequel on cherche à focaliser. La théorie en a été développée par Didier Cassereau et Mathias Fink [4,5].

On considère donc un milieu hétérogène et immobile entouré par une telle cavité (Fig. 1).

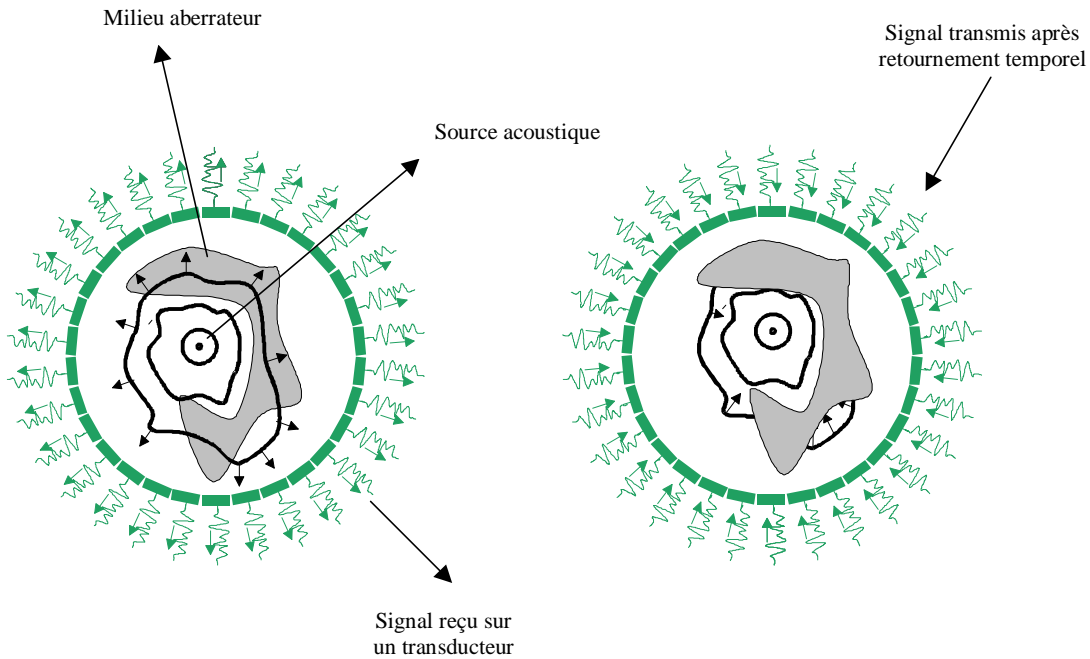


Fig. 1. Principe de fonctionnement d'une cavité à retournement temporel

Une expérience de retournement temporel peut alors être décrite ainsi :

- 1) un point source au sein de la cavité émet une onde brève.
- 2) cette onde se propage, en rencontrant éventuellement des hétérogénéités, et est enregistrée pendant un temps T sur les capteurs situés sur la face interne de la cavité.
- 3) ces capteurs ré émettent dans la cavité le champ retourné temporellement.
- 4) on mesure sur et autour du point source le champ acoustique ré-émis.

En généralisant l'utilisation du théorème de Green aux milieux hétérogènes, Didier Cassereau et Mathias Fink [4] ont montré que le champ retourné temporellement s'écrit en tout point \mathbf{r}' de la cavité :

$$\varphi(\mathbf{r}', t) = G(\mathbf{r}', T - t'; \mathbf{r}_s, t_s) - G(\mathbf{r}', T - t'; \mathbf{r}_s, T - t_s) \quad (4)$$

où $G(\mathbf{r}', t; \mathbf{r}_s, t_s)$ est la fonction de Green définissant au point \mathbf{r}' et à l'instant t le champ issu du point source \mathbf{r}_s au temps t_s . T , temps d'enregistrement du champ incident sur les capteurs tapissant la surface, est choisi tel que le champ s'annule sur tous les capteurs pour $t > T$. Le premier terme est l'expression de l'onde issue de la source et retournée temporellement : c'est une onde convergente sur le point \mathbf{r}_s au temps $t' = T - t_s$. Le deuxième terme décrit une onde divergente depuis le point source à partir de $t = T - t_s$, signe que le retournement temporel est imparfait.

En effet, une seule onde a été émise au temps $t = t_s$. Si le retournement temporel était parfait, nous devrions donc retrouver, lorsque le « film est repassé à l'envers », une onde convergente sur le point source à l'instant $t = t_s$ et disparaissant après. Pour cela, il faudrait que le point S, initialement émetteur, se comporte au retour de l'onde comme un absorbeur. C'est cette absence de « puits acoustique » au point source qui explique la superposition des deux ondes, superposition responsable de l'apparition d'une tache autour de la source. Didier Cassereau et Mathias Fink ont montré que la taille minimale de cette tache en milieu homogène et pour une fréquence donnée s'établit à $\lambda/2$ [4].

Dans la pratique, les transducteurs n'ont pas besoin de couvrir de façon continue la surface de la cavité. En effet, au cours de la propagation, les détails fins de la source, portées par les ondes évanescentes, sont perdus et ne sont donc pas captés par la cavité. Compte tenu de cet effet de filtrage de la diffraction, on peut se contenter d'échantillonner la surface avec un nombre fini de transducteurs séparés de $\lambda/2$, où λ est la plus petite longueur d'onde du signal émis.

Par exemple, pour une cavité sphérique de rayon $R = 5\text{cm}$ et une fréquence centrale de 3,2 MHz, le nombre minimal de transducteurs nécessaires est $\frac{4\pi R^2}{(\lambda/2)^2} \approx 62000$. Si le milieu de propagation est invariant par translation le long d'un axe, c'est le cas de notre forêt de tiges, une cavité circulaire de rayon $R = 5\text{cm}$ à la fréquence 3,2 MHz requiert encore $\frac{2\pi R}{(\lambda/2)} \approx 1400$ transducteurs. Dans la pratique ce nombre est trop grand et la technologie correspondante trop complexe pour réaliser de telles cavités. On se contente donc de couvrir de transducteurs de petites portions de l'espace pour construire des « réseaux » appelés miroirs à retournement temporel (MRT).

2.3. Le miroir à retournement temporel

Nous disposons au laboratoire de différents types de miroirs à retournement temporel. Ils peuvent être plans ou préfocalisés, à une ou deux dimensions. Leurs principales limitations sont les suivantes :

- 1) Dans l'approximation de Fresnel, la résolution spatiale optimale du MRT est donnée par la largeur à -6 dB de la tache focale, soit :

$$\delta \approx \frac{\lambda F}{D} \quad (3)$$

où D est la taille du miroir et F la distance focale.

- 2) Dans le domaine temporel, la bande passante limitée des transducteurs introduit un étalement temporel des signaux. Le retournement temporel d'un pic de Dirac n'est en effet pas un pic de Dirac mais l'autocorrélation de la réponse acousto-électrique des transducteurs. Ce signal définit la compression temporelle optimale du MRT.

- 3) L'échantillonnage spatial du MRT est à l'origine de « lobes de réseaux » autour de la tache focale. Ces lobes sont repoussés à l'infini, disparaissant du diagramme de directivité, pour un pas d'échantillonnage inférieur ou égal à $\lambda/2$.
- 4) L'échantillonnage temporel du signal sur le miroir est responsable de lobes secondaires dans la focalisation spatiale. Un échantillonnage temporel de pas $T/8$, où T est la période centrale de l'onde acoustique, suffit à limiter à -30 dB ces lobes secondaires.

En conclusion, un milieu est réversible s'il vérifie la condition d'invariance par renversement du temps. La réciprocité est une condition nécessaire mais pas suffisante pour que le milieu soit réversible. Les deux propriétés ne sont équivalentes qu'en milieu non dissipatif. Dans une cavité à retournement temporel, la résolution optimale obtenue autour du point source est $\lambda/2$. Dans la pratique, on utilise en fait des MRT d'ouverture limitée. Autrement dit, dans l'esprit de la discussion du paragraphe 1, on commet une erreur dans la définition de l'onde

retournée temporellement. Cela se traduit par une perte d'énergie qui stricto sensu brise la réversibilité de l'expérience. On diminue donc la « probabilité de retour » de l'onde sur son état initial, ce qui dans la pratique se traduit par un élargissement de la tache focale.

Toutefois, il est possible d'approcher la limite de résolution de la cavité par l'introduction de parois réfléchissantes qui permettent d'agrandir virtuellement la taille du miroir. Cette idée est à l'origine des expériences de retournement temporel dans des guides d'onde [5] ou dans des cavités chaotiques [6]. Suivant la même idée, nous allons montrer dans le paragraphe 3 que nous pouvons tirer profit des diffusions multiples dans un échantillon aléatoire désordonné pour améliorer la résolution d'un MRT. Autrement dit, la complexité du milieu, loin de rendre impossible la réalisation d'une expérience de renversement du temps comme ce serait le cas en mécanique classique, « nous aide à augmenter la probabilité de retour de l'onde sur son état d'origine ».

2.4. Formalisme de la réponse impulsionnelle

Le processus de retournement temporel peut être décrit, en rétrodiffusion comme en transmission, en utilisant le formalisme de la réponse impulsionnelle [7] (Fig. 2.). Ce formalisme permet de retrouver un certain nombre de résultats importants. Par ailleurs, il fait le lien avec les expériences numériques utilisées comme outil de diagnostic du chaos.

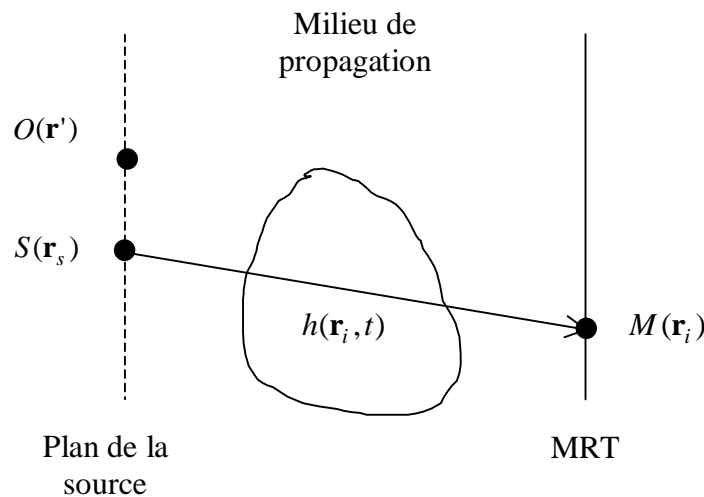


Fig. 2. Formalisme de la réponse impulsionnelle.

Lorsque la source S émet un Dirac $\delta(t)$, l'élément M du MRT situé en \mathbf{r}_i reçoit l'amplitude $h(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i, t)$ et renvoie $h(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i, -t)$. Après propagation de l'onde retournée temporellement, on reçoit au point d'observation O dans le plan de la source le signal $h(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i, -t) * h(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}', t)$.

Compression temporelle au point source

En particulier, au point source, on récupère le signal $h(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i, -t) * h(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_s, t)$. Le milieu étant réciproque, $h(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i, -t) * h(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_s, t) = h(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i, -t) * h(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i, t)$. Le retournement temporel réalise donc une opération de convolution qui atteint toujours son maximum en $t = 0$. Ce résultat est l'expression du fait qu'une expérience de retournement temporel, pour peu que le milieu soit réciproque, réalise toujours un filtre adapté au sens où il maximise l'énergie au temps de refocalisation. Par contre, cela ne préjuge en rien du niveau des lobes autour de la tache focale. Si le milieu est non dissipatif et que l'on dispose d'une cavité permettant d'enregistrer la totalité du signal, le filtre adapté devient un filtre inverse [8], ce qui se traduit par la disparition des lobes secondaires.

En sommant sur les N capteurs du miroir, le signal reçu au point source s'écrit finalement :

$$s(\mathbf{r}_s, t) = \sum_{i=1}^N \int_0^{\infty} h(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i, \theta) h(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i, t + \theta) d\theta \quad (4)$$

Cette quantité peut être vue comme un estimateur de la fonction de corrélation temporelle du signal émis par la source et reçu sur le miroir $\langle h(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i, \theta) h(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i, t + \theta) \rangle$ [7].

Focalisation

Le diagramme de directivité est obtenu en retenant le maximum du signal reçu sur chaque transducteur. Ce maximum arrive au temps $t = 0$. Le diagramme de directivité théorique est donc donné par :

$$s(\mathbf{r}', t = 0) = \sum_{i=1}^N \int_0^{\infty} h(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}', \theta) h(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_s, \theta) d\theta \quad (5)$$

La moyenne d'ensemble de ce diagramme fait intervenir $\langle h(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}', \theta) h(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_s, \theta) \rangle$ fonction de corrélation spatiale du champ à l'instant θ en faisant jouer le rôle de la source au capteur situé en \mathbf{r}_i .

Erreurs commises sur l'onde retournée temporellement.

Nous avons commencé à l'évoquer : les sources d'erreur dans la définition de l'onde retournée temporellement sont multiples. En premier lieu, puisqu'on ne dispose pas de cavité, l'onde retournée temporellement subit une troncature spatiale. Par ailleurs, on peut choisir, plutôt que de renvoyer la totalité du signal reçu, de n'en sélectionner qu'une partie dans une fenêtre qu'on appellera « fenêtre de retournement temporel ». Enfin, l'onde retournée temporellement est quantifiée sur 9 bits et n'est définie qu'aux pas d'échantillonnage spatial et temporel près.

Le milieu lui même peut être sujet à des modifications qui vont introduire des erreurs dans la propagation de l'onde retournée temporellement.

Dans le premier cas, on ne renvoie donc pas strictement $h(\mathbf{r}, -t)$ mais $g(\mathbf{r}, -t)$ qui est la restriction à un intervalle d'espace ou de temps de la réponse impulsionnelle est qui est définie à une précision dépendant des pas d'échantillonnage et de quantification.

Dans le second cas, c'est la propagation retour qui va être décrite par une nouvelle réponse impulsionnelle $k(\mathbf{r}, t)$.

Dans les deux cas, la mesure de la compression temporelle au point source et du diagramme de directivité peuvent donc être vues comme des mesures de l'effet des erreurs introduites dans l'onde retournée temporellement et des modifications du milieu. Dans ce chapitre, en adoptant la philosophie du paragraphe 1, nous allons donc nous intéresser à l'étude de la propagation de ces erreurs.

Mais en premier lieu, nous mettons en évidence la réversibilité d'une onde ultrasonore dans un milieu multidiffuseur.

3. Mise en évidence expérimentale de la réversibilité en milieu multidiffuseur

Arnaud Derode et Philippe Roux [9] ont montré pour la première fois la possibilité de retourner temporellement une onde ultrasonore se propageant dans un milieu multidiffuseur. Pour notre part, nous présentons une expérience analogue avec un milieu multidiffuseur à plus haut degré de désordre (i.e. l_s / λ plus petit) d'épaisseur $L = 80mm$ pour lequel il n'existe plus de transmission balistique. Les paramètres de cet échantillon, étudié dans les paragraphes précédents, sont $l^* = 4.8mm$ et $D = 3.2mm^2 / \mu s$. Le schéma de l'expérience est présenté Fig. 3.

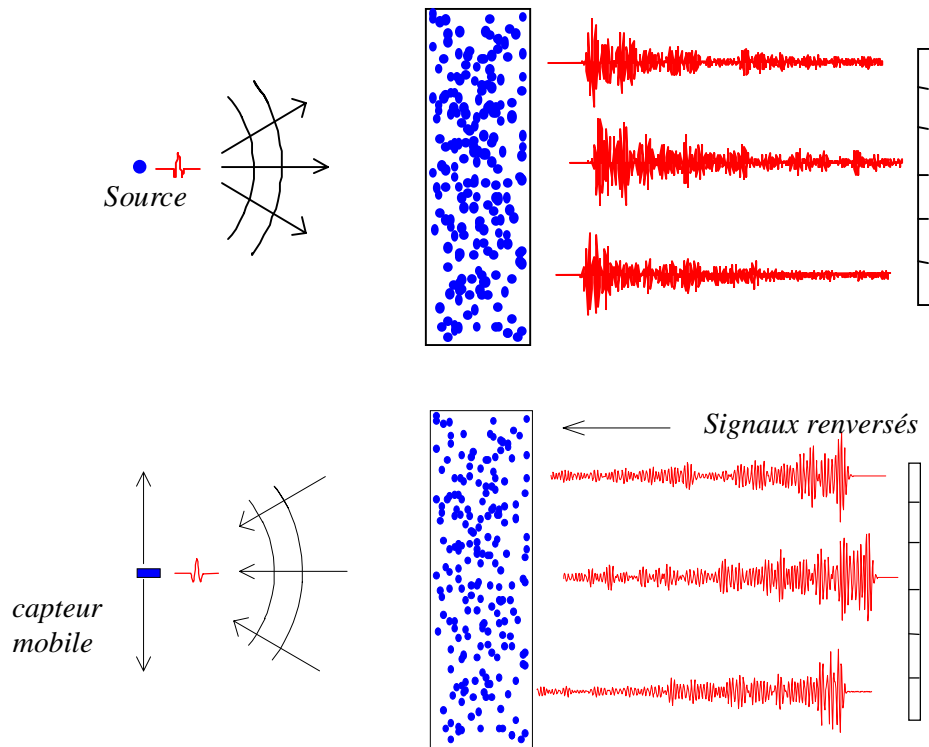


Fig. 3. Montage expérimental pour l'étude du retournement temporel en milieu désordonné

Dans cette expérience on s'intéresse à la propagation à travers le milieu d'une onde ultrasonore entre un transducteur source de taille 0,38 mm, de fréquence 3,2 MHz et un MRT. Le MRT est ici un réseau linéaire de 128 transducteurs séparés d'environ une longueur d'onde. Chaque transducteur possède sa propre électronique constituée d'un convertisseur A/D échantillonnant à 20 MHz sur 9 bits, d'une mémoire et d'un convertisseur D/A (Fig. 4). La dynamique en réception est de 90 dB, comprise entre 20 μ V et 200 mV grâce à un amplificateur logarithmique. En émission, on dispose de 8 bits en linéaire, soit 40 dB avec une amplitude crête à crête de 15 V au maximum. L'ensemble est piloté par un ordinateur

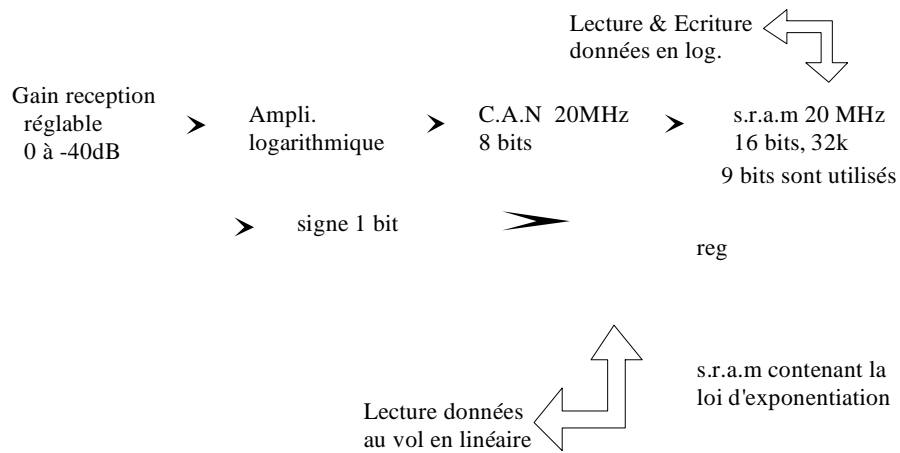
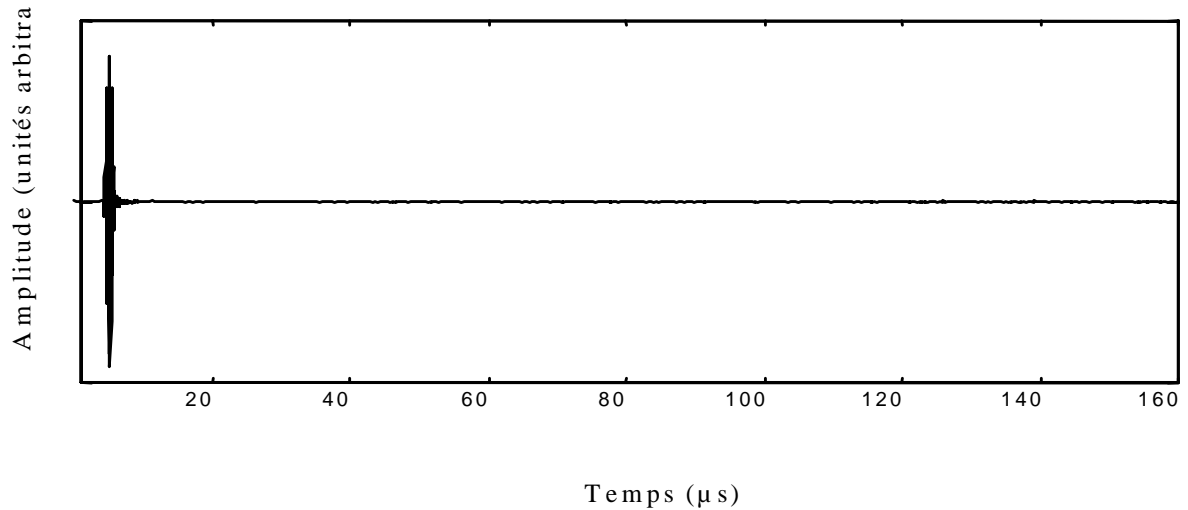
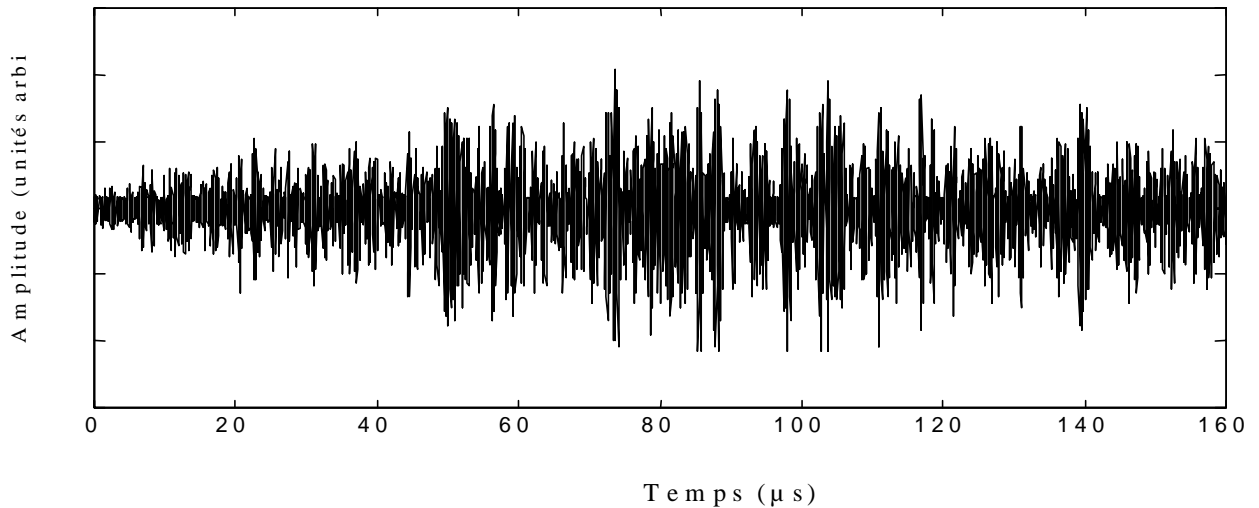


Fig. 4. Schéma d'une voie électronique du MRT

Initialement, le transducteur source, jouant le rôle d'un petit microphone, « pousse un cri » très bref ($1 \mu\text{s}$) en direction du milieu dans lequel l'onde ainsi générée est susceptible de subir un grand nombre de diffusions. Sur le réseau de transducteurs, les signaux enregistrés s'étendent sur près de $300 \mu\text{s}$, ce qui traduit un étalement considérable du signal de départ provoqué par la diffusion multiple dans le milieu. Nous en représentons $160 \mu\text{s}$ Fig. 5.



(a)



(b)

Fig. 5. Signal reçu sur la voie #64 a) dans l'eau b) à travers le milieu d'épaisseur $L = 80\text{mm}$.

Dans une deuxième phase, les 300 μs de signal sont retournés temporellement et re-émis dans le milieu par chacun des transducteurs.

Compression temporelle au point source

Le transducteur qui a servi de source est maintenant utilisé comme hydrophone. On constate que l'onde revit effectivement les étapes antérieures de sa propagation et se reconcentre sur la source initiale en une impulsion très brève de l'ordre de la μs (Fig. 6).

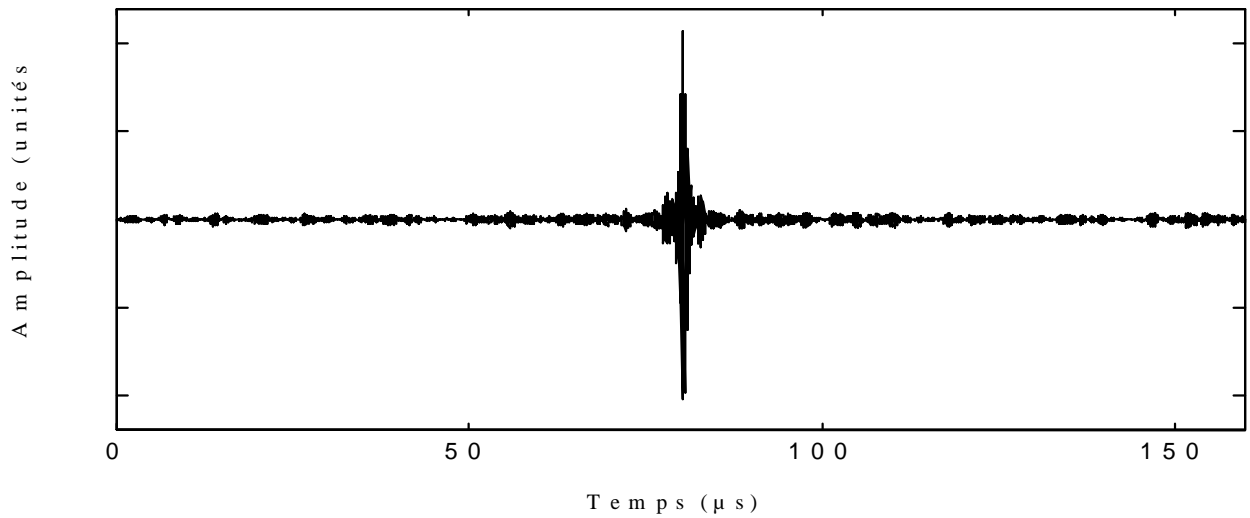


Fig. 6. Compression temporelle au point source après retournement temporel

Focalisation

Afin de caractériser la qualité de la focalisation spatiale, on déplace l'hydrophone dans le plan de la source tandis que le MRT continue de tirer, toute les ms, les mêmes signaux. En relevant le maximum de pression obtenu pour chaque position, on peut dresser le diagramme de directivité de l'onde retournée temporellement (Fig. 7).

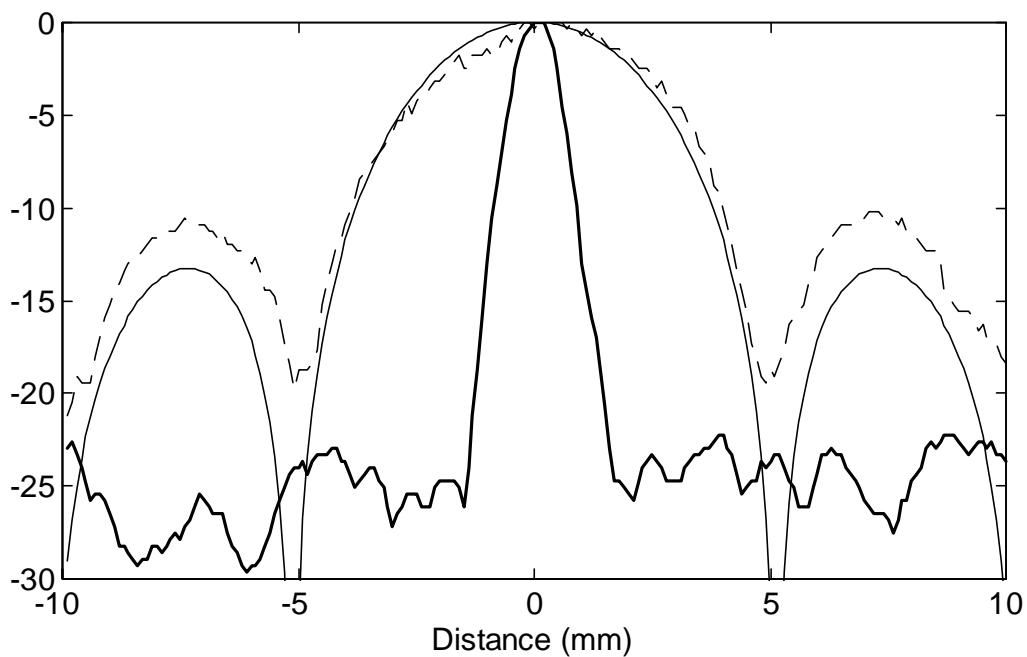


Fig. 7. Diagramme de directivité de l'onde retournée temporellement dans l'eau (trait pointillé) et à travers le milieu multidiffuseur (trait gras). Le sinus cardinal théorique est en trait fin.

On constate que la tache focale obtenue est cinq fois plus fine qu'en milieu homogène. Autrement dit, non seulement on parvient grâce au retournement temporel à refocaliser sur sa source une onde ultrasonore se propageant en milieu hétérogène mais, plus encore, on tire parti de la complexité du milieu pour améliorer la focalisation.

Dans cette expérience de base, on a retourné temporellement la totalité du signal multidiffusé. On peut également choisir de ne sélectionner qu'une partie de ce signal dans une fenêtre que l'on appellera « fenêtre de retournement temporel ». On peut aussi décider de n'utiliser qu'une partie des 128 transducteurs pour émettre l'onde retournée temporellement. Afin d'aller plus loin dans la compréhension du processus de retournement temporel, nous allons donc étudier l'évolution de la compression temporelle et de la focalisation pour les différents paramètres du retournement temporel.

4. Effets des erreurs dans la définition de l'onde retournée temporellement

4.1. Troncature spatiale

Dans l'expérience que nous venons de présenter, l'onde ultrasonore transmise à travers le milieu n'est captée que sur une petite portion de l'espace, les 128 transducteurs du miroir à retournement temporel. Malgré la perte d'information qui en résulte, il est possible de refocaliser l'onde ultrasonore sur sa source par retournement temporel sur chacun des capteurs. Plus étonnant encore, le retournement temporel est encore possible si on utilise un seul capteur du MRT (Fig. 8). Par exemple, on présente pour $L = 40mm$ la compression temporelle obtenue au point source lorsque la totalité du signal reçu sur le capteur #64 est retournée temporellement et ré émise.

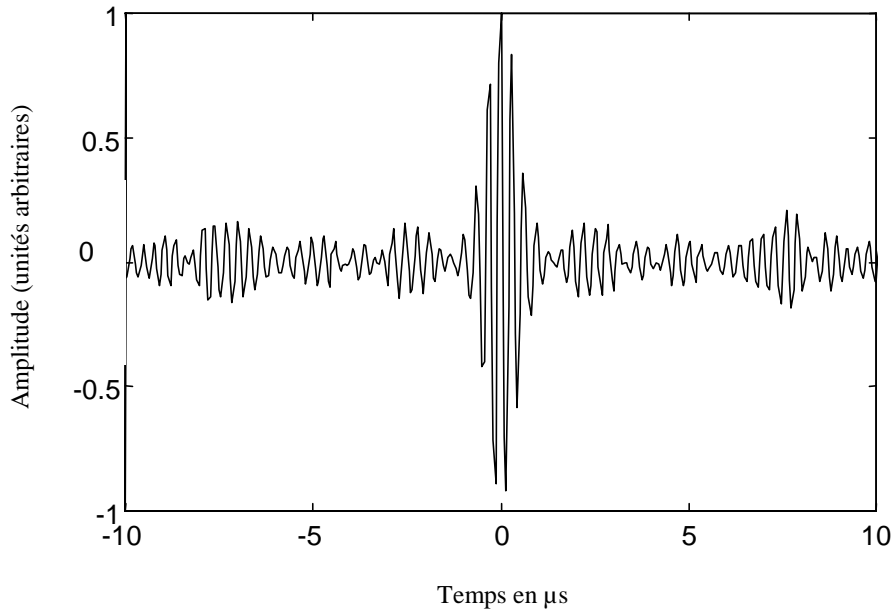


Fig. 8. $L = 40\text{mm}$. Signal recréé sur la source en utilisant 1 seul transducteur du MRT (élément #64) pour le retournement temporel.

Cette expérience fait la différence entre une expérience de retournement temporel en acoustique et une expérience de conjugaison de phase en optique [9] qui est son analogue pour une fréquence. Dans une expérience de conjugaison de phase, il n'est pas possible de produire le « vrai » retourné temporel pour une impulsion large bande. Pour une impulsion courte, un effet non linéaire peut être utilisé pour conjuguer son enveloppe, ce qui ne produit le vrai retourné temporel que dans la limite d'une largeur de bande tendant vers 0. Dès lors, en optique, un seul point de réception ne suffirait pas pour produire l'onde conjuguée d'une onde sphérique. Dans notre cas au contraire, comme nous travaillons en régime impulsionnel, l'information angulaire contenue dans le front incident est peu à peu reportée sur le temps par le biais des diffusions sur les tiges. C'est pourquoi un seul transducteur suffit à recréer toute l'information de phase. Sur ce même principe, Carsten. Draeger et Mathias Fink ont appris à focaliser des ondes élastiques dans des cavités chaotiques réfléchissantes à 2 D [10] avec un transducteur unique.

Evidemment avec un seul transducteur, le niveau de bruit autour du pic de refocalisation (Fig. 8) est fortement rehaussé.

Etude du rapport signal sur bruit pour les épaisseurs $L = 15mm$, $L = 40mm$ et $L = 80mm$

Afin d'étudier quantitativement l'effet d'une diminution de l'ouverture du MRT sur la qualité de la compression au point source, nous avons renouvelé, pour trois épaisseurs différentes du milieu, l'expérience décrite au paragraphe 3 en faisant varier le nombre N de transducteurs participant au retournement temporel.

En notant $s(t)$ le signal refocalisé au point source, on peut définir le rapport signal sur bruit (RSB) comme l'amplitude du pic sur l'écart type du bruit environnant, soit :

$$RSB = \max_t(s(t)) / \sqrt{\int_{T_1}^{T_2} s(t)^2 dt} \quad (6)$$

où $[T_1, T_2]$ est une fenêtre temporelle prise dans le bruit T_1 μs après le pic .

La figure 9 présente l'évolution du RSB en fonction de $N^{1/2}$ pour l'épaisseur $L = 15mm$. Un fit linéaire donne une pente égale à 0,57.

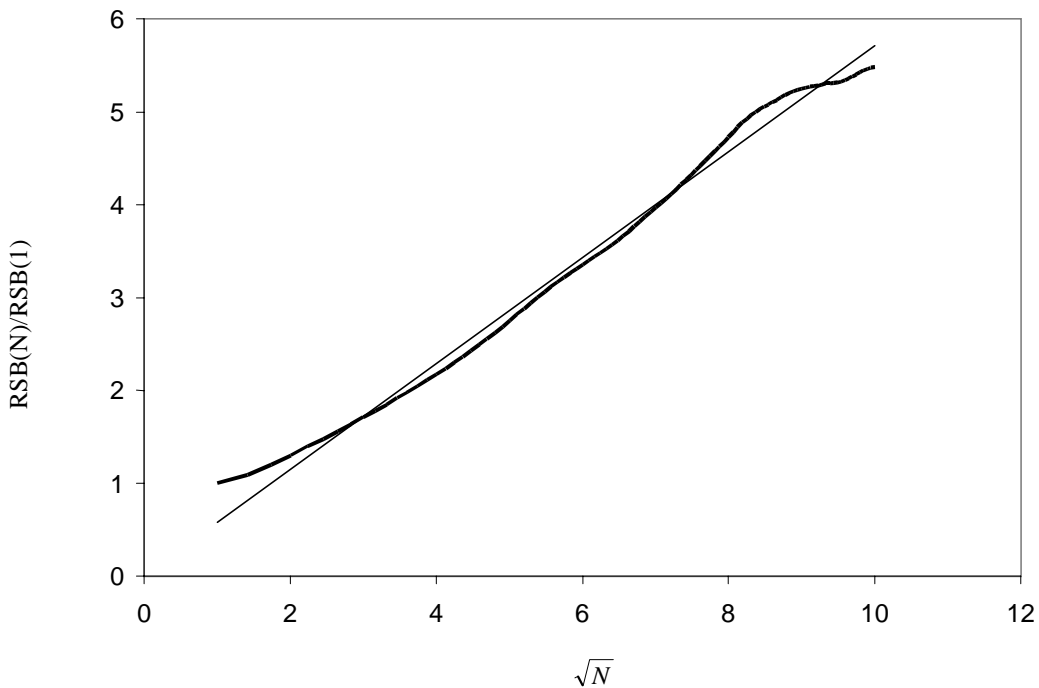


Fig. 9. Retournement temporel à travers un échantillon $L=15$ mm. Evolution du RSB en fonction de la racine carrée du nombre d'éléments participant au retournement temporel. Pour évaluer le RSB, l'écart type est calculé dans la fenêtre temporelle comprise entre $T_1 = 2\mu\text{s}$ et $T_2 = 10\mu\text{s}$ après le pic.

L'interprétation de cette courbe est la suivante. Rappelons (cf. paragraphe 2.4) que le signal observé au point source après retournement temporel s'écrit $s(t) = \sum_{i=1}^N h_i(t) * h_i(-t) = \sum_{i=1}^N s_i(t)$. En particulier, le bruit autour du pic de refocalisation est la somme de N signaux aléatoires. Nous présentons Fig. 10 le coefficient de corrélation de ces signaux en fonction de la distance $d_{i,j} = |i - j|$ entre les capteurs i et j , calculé dans la fenêtre $[T_1, T_2]$ en utilisant la formule :

$$\rho(j) = \frac{N}{N-j} \frac{\sum_{i=1}^{N-j} \int_{T_1}^{T_2} (s_i(t) - \bar{s}_i)(s_{i+j}(t) - \bar{s}_{i+j})}{\sum_{i=1}^N \int_{T_1}^{T_2} (s_i(t) - \bar{s}_i)(s_i(t) - \bar{s}_i)} \quad (7)$$

où $\bar{s} = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} s(t) dt$.

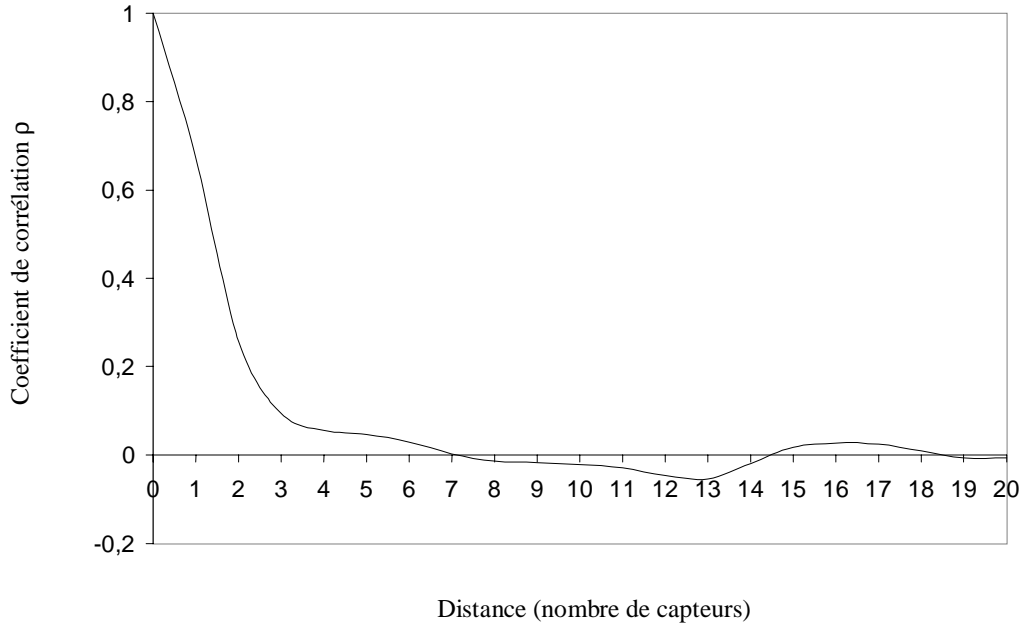


Fig. 10. $L=15$ mm. Coefficient de corrélation spatiale du bruit autour du pic de refocalisation en fonction de la distance $d_{i,j} = |i - j|$ exprimée en nombre de capteurs.

Après une chute brutale, le corrélation devient négligeable pour $d_{i,j} \geq 3$ et fluctue autour de 0. $d_c \approx 3$ définit une distance caractéristique de corrélation. Si on cette courbe est modélisée par une fonction échelon telle que :

$$\pi(d_{ij}) = 1 \text{ pour } d_{ij} \leq d_c / 2$$

$$\pi(d_{ij}) = 0 \text{ pour } d_{ij} \geq d_c / 2$$

Arnaud Derode a montré que le RSB varie en $\sqrt{N/d_c}$ [7]. La valeur $d_c \approx 3$ donne pour la droite de la courbe 9 une pente théorique de 0,57 conforme à la pente expérimentale.

Pour $L = 40\text{mm}$ (Fig. 11), l'évolution est initialement linéaire puis présente une saturation au delà de $N \approx 36$. Pour $L = 80\text{mm}$, l'effet de saturation est encore plus spectaculaire. Le contraste obtenu avec 127 capteurs n'est qu'une fois et demi supérieur à celui obtenu avec un seul capteur !

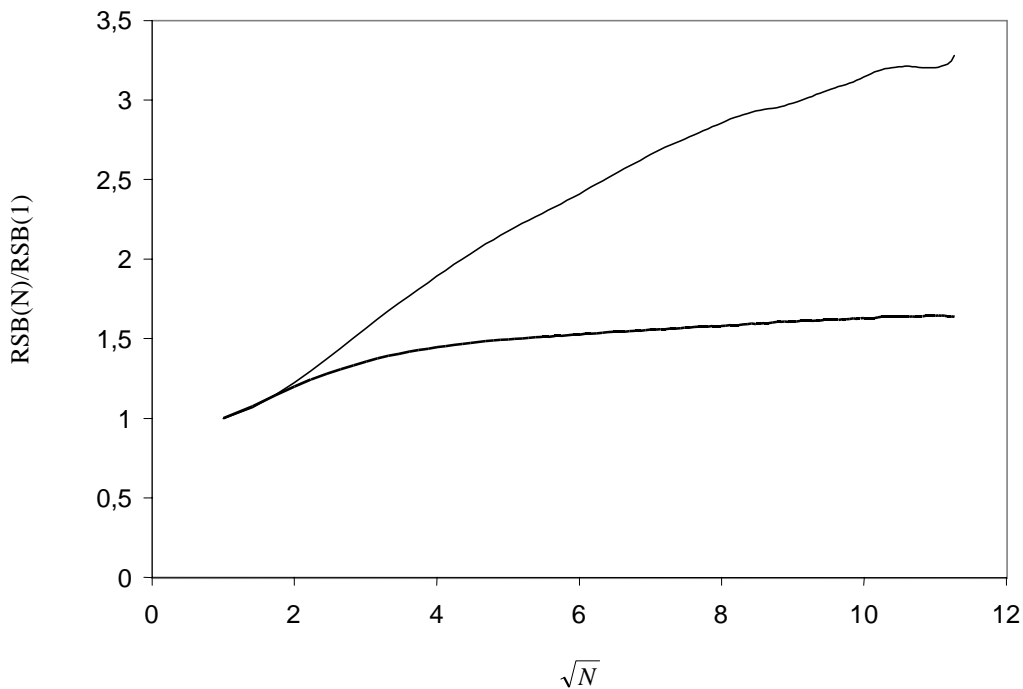


Fig. 11. Retournement temporel à travers un échantillon de 40 mm d'épaisseur (trait fin), 80 mm (trait épais) : évolution du RSB en fonction de la racine carrée du nombre d'éléments participant au retournement temporel. Les résultats sont normalisés par rapport au RSB obtenu pour $N = 1$.

L'effet de saturation du RSB ne peut s'expliquer que par l'existence de corrélations spatiales longue portée dans le bruit autour du pic de refocalisation. Nous présentons Fig. 12 l'évolution du coefficient de corrélation entre les bruits des contributions $s_i(t)$ et $s_j(t)$ des transducteurs i et j en fonction de la distance $|i - j|$ pour les épaisseurs $L = 40mm$ et $L = 80mm$.

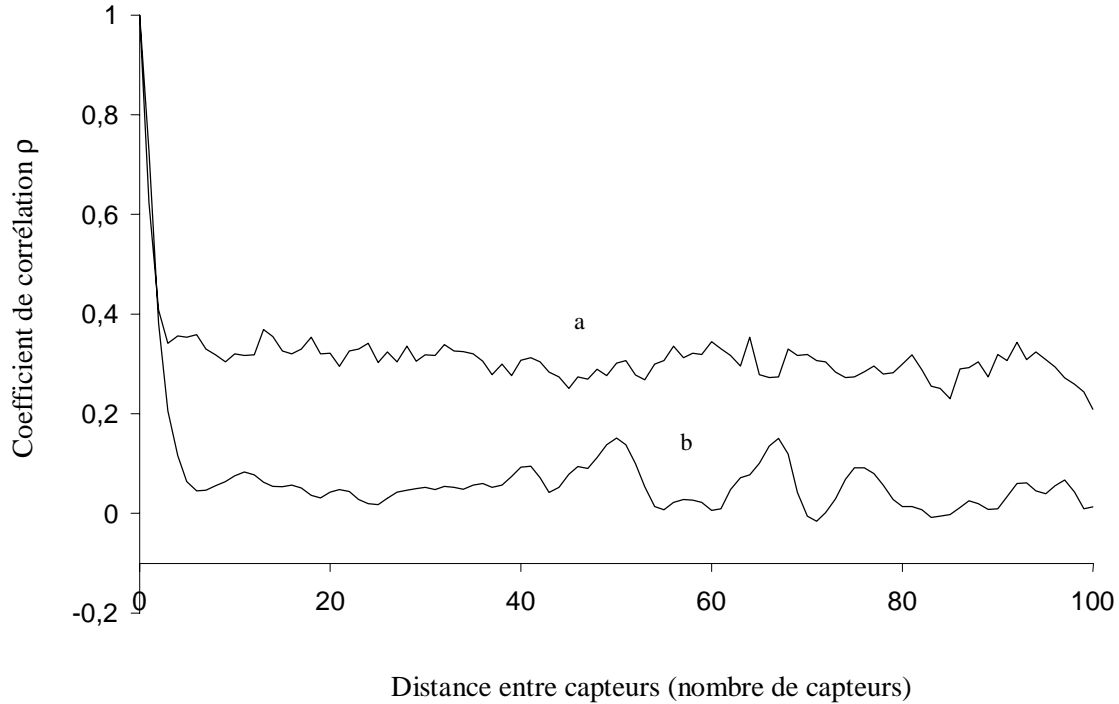


Fig. 12. Coefficient de corrélation, calculé dans la fenêtre $[T_1, T_2]$ à proximité du pic, entre les contributions $s_i(t)$ et $s_j(t)$ des capteurs i et j au pic de refocalisation en fonction de la distance $|i - j|$ pour $L = 80mm$ (a) et $L = 40mm$ (b).

Après une chute brutale de la corrélation, nous observons pour les deux épaisseurs un plateau caractéristique de corrélations spatiales longue portée. Celles-ci sont différentes des corrélations longue portée observées avec des micro-ondes ou en optique. Il s'agit de corrélations entre les contributions des différents capteurs au retournement temporel tandis que dans le cas des ondes électromagnétiques, on s'intéresse aux corrélations de l'intensité transmise (cf. annexe 2 du chapitre 2).

Cela étant, les corrélations que nous observons ont des caractéristiques communes avec ces dernières. Elles semblent inhérentes au régime multidiffuseur et croissent en fonction de l'épaisseur. Par ailleurs, elles ne sont pas observées sur l'amplitude transmise mais sur des quantités qui ont la dimension d'une intensité. En effet, nous avons vu au paragraphe 2.4 que le

signal obtenu par retournement temporel avec le capteur $\#i$ s'écrit au point source $s_i(t) = \int h_i(\theta)h_i(\theta + t)d\theta$ qui est un estimateur de la corrélation temporelle du champ transmis. Pour $t = 0$, ce signal est aussi l'énergie reçue en transmission sur le capteur $\#i$. Le coefficient de corrélation que nous avons défini mesure donc le degré de ressemblance spatial entre des estimateurs de la corrélation temporelle de l'amplitude, quantité qui a les mêmes dimensions qu'une intensité.

En conclusion, lorsque les contributions au pic recréé par retournement temporel sont décorrélées entre elles, ce qui est bien vérifié pour des épaisseurs de l'ordre du libre parcours moyen de transport, utiliser le plus grand nombre possible de capteurs est nécessaire pour assurer un RSB optimal. Pour des épaisseurs très grandes devant le libre parcours moyen, l'apparition de corrélations longue portée entre les contributions des différents capteurs participant au retournement temporel rend inutile l'utilisation de toute l'ouverture du réseau. Pour $L = 80mm$, l'ajout de capteurs au-delà de $N = 16$ n'apporte plus d'amélioration au rapport signal sur bruit.

Dans les expériences que nous venons de présenter, nous avons retourné temporellement la totalité du signal et avons étudié l'influence du nombre de capteurs participant au retournement temporel. Dans la suite de l'exposé, nous ne sélectionnons qu'une partie du signal reçu sur le MRT dans une fenêtre appelée « fenêtre de retournement temporel ».

4.2. Retournement temporel par fenêtre

Nous allons voir que la tache de focalisation obtenue autour du point source dépend étroitement de la fenêtre de retournement temporel sélectionnée. En mécanique classique, l'expérience équivalente consisterait à lancer un paquet de billes dans le milieu, à capter les billes derrière l'échantillon, en enregistrant leur vecteur vitesse et leur ordre d'arrivée, et à les renvoyer dans le milieu [11]. Dans ce cas, la capacité à faire reconverger une bille vers son point source dans une expérience de renversement du temps décroît exponentiellement avec l'ordre de diffusion correspondant. Dans notre expérience au contraire, nous allons voir que la focalisation s'affine en fonction du temps, c'est-à-dire que la « probabilité de retour de l'onde » sur son point source augmente.

En transmission, la vitesse à laquelle l'information nécessaire à reconstruire le front d'illumination est véhiculée dépend étroitement du milieu. Par contre, en rétrodiffusion, un modèle simple fondé sur un calcul de « temps de vol » en eau libre donne l'évolution de la largeur à mi-hauteur de la tache focale en fonction de la fenêtre de retournement temporel sélectionnée.

4.2.1. Transmission

Le dispositif expérimental est le même que celui présenté au paragraphe 2 (Fig. 3). L'échantillon étudié est d'épaisseur $L = 80\text{mm}$. Au lieu de retourner tout le signal, on sélectionne des fenêtres de retournement temporel disjointes, de largeur $\Delta T = 5\mu\text{s}$, repérées par leur position t par rapport au premier écho reçu sur le réseau de transducteurs. Nous présentons sur la figure 13 trois exemples de tache focale ainsi obtenues.

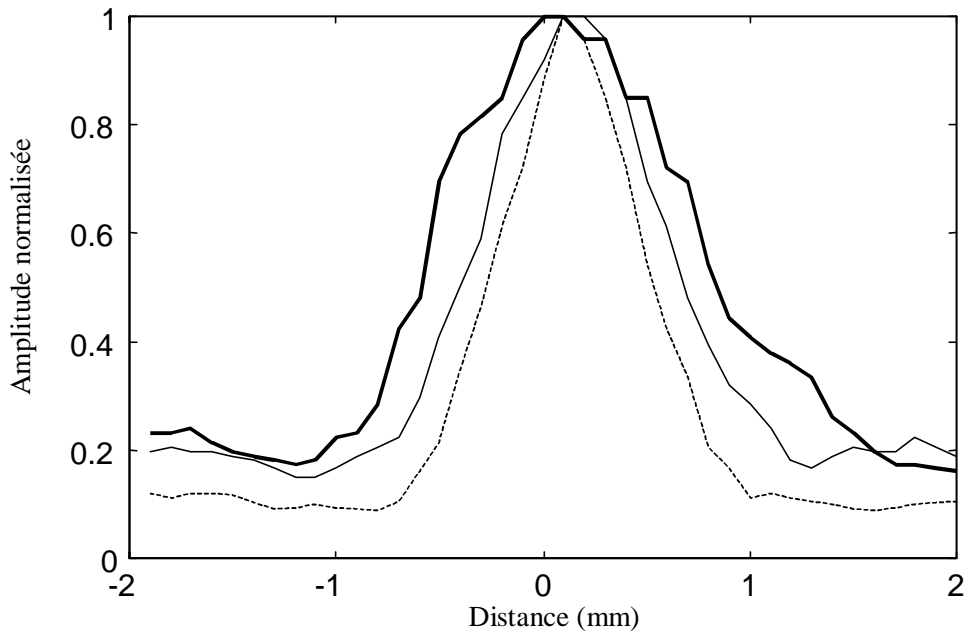


Fig. 13 Diagrammes de directivité pour trois positions du début de la fenêtre de retournement temporel. Trait épais : $t = 10\mu\text{s}$, trait fin : $t = 25\mu\text{s}$, trait pointillé : $t = 100\mu\text{s}$.

On constate que la tache focale s'affine en fonction du temps ce qui indique que le spectre angulaire du front recréé à la sortie de l'échantillon après retournement temporel s'élargit. L'évolution complète de la tache focale est présentée figure 14.

L'échantillon étudié étant beaucoup plus épais que le libre parcours moyen élastique, il n'existe plus de front balistique, c'est à dire plus de trajet direct du point source jusqu'au réseau (cf. chapitre 1). Par conséquent, la vitesse de propagation de l'information angulaire n'est pas facilement calculable.

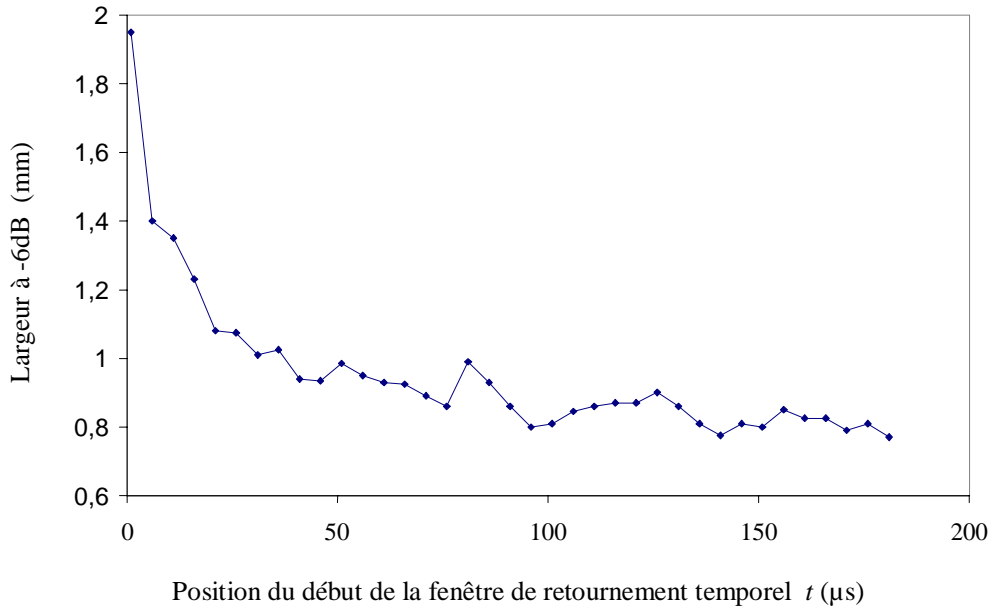


Fig. 14. Evolution de la largeur de la tache focale en fonction du temps pour $L = 80\text{mm}$.

L'effet du milieu de propagation est d'agrandir artificiellement l'ouverture du réseau (Fig. 15).

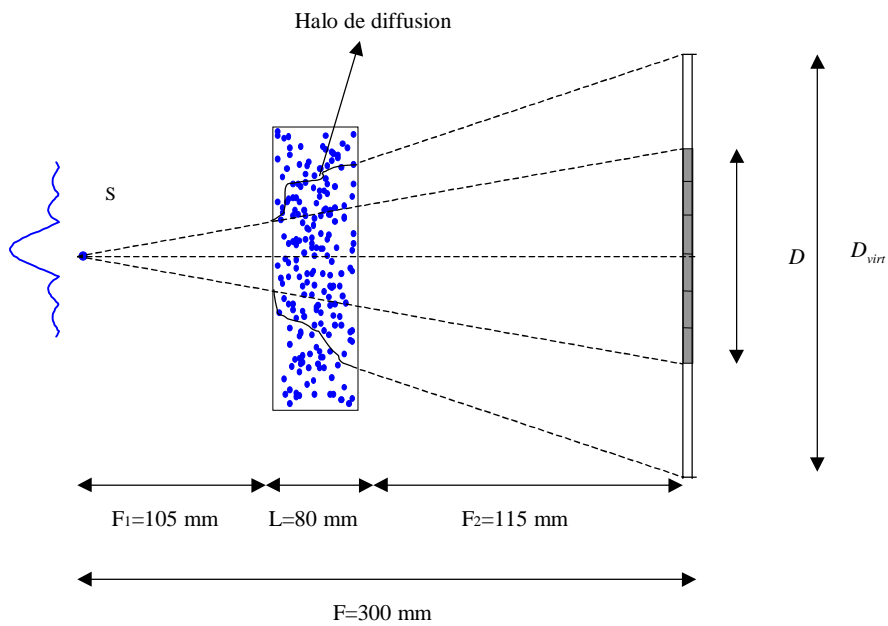


Fig. 15. En milieu homogène (dans l'eau), la tache focale obtenue autour du point S après retournement temporel dépend de l'ouverture D du MRT. L'effet du milieu multidiffuseur est d'agrandir artificiellement l'ouverture du réseau.

Tout se passe comme si nous disposions d'un MRT d'ouverture $D_{virt}(t)$ dépendant de la fenêtre temporelle sélectionnée. En reliant l'ouverture virtuelle $D_{virt}(t)$ à la largeur $\delta(t)$ de la tache focale mesurée à -6dB :

$$\delta(t) \approx \frac{\lambda F}{D_{virt}(t)} \quad (8)$$

on a accès à son évolution temporelle (Fig. 16).

Si nous disposions d'un MRT d'ouverture infinie et que nous l'utilisions pour enregistrer le front d'onde issu de la source S et se propageant en eau libre, l'évolution temporelle de l'ouverture D_{eau} serait donnée par :

$$D_{eau}(t) = \sqrt{c^2 t^2 - F^2} \quad (9)$$

Il s'agit simplement de l'expression de la largeur du front d'onde en eau libre à l'instant t dans le plan du MRT.

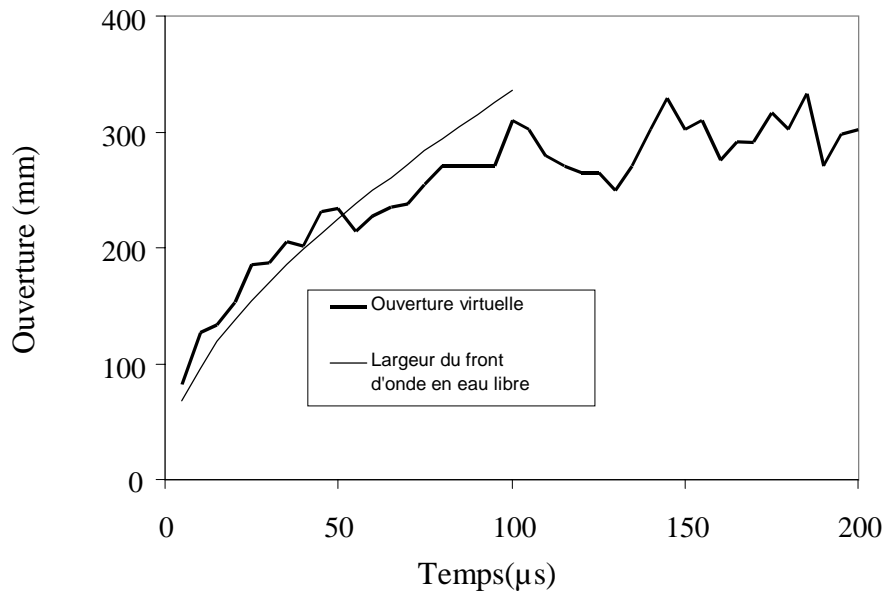


Fig. 16. Comparaison de l'ouverture virtuelle produite par le milieu multidiffuseur et de la largeur du front d'onde en milieu homogène dans le plan de réception.

Pour les premières fenêtres de retournement temporel, l'ouverture virtuelle varie comme la taille du front d'onde en eau libre. Puis le nombre de diffusions devient tel que les chemins acoustiques correspondant à un angle donné deviennent plus longs qu'en eau libre.

Comme nous ne disposons pas de modèle simple pour décrire la propagation de l'amplitude dans le milieu, à fortiori sur une réalisation du désordre, il est difficile de trouver un modèle quantitatif d'évolution de la tache focale. Nous allons voir que le problème est plus simple à traiter dans une expérience de retournement temporel en rétrodiffusion.

4.2.2. Rétrodiffusion

4.2.2.1. Retournement temporel en rétrodiffusion : « l'effet miroir »

Compression temporel sur la source

En utilisant un ou plusieurs des éléments du MRT comme source initiale, on peut imaginer une expérience de retournement temporel en rétrodiffusion. Le montage expérimental est présenté Fig. 17 [12].

Nous utilisons un réseau de 128 transducteurs de fréquence centrale 1.4 MHz, ce qui correspond à une longueur d'onde de 1 mm dans l'eau. Les éléments du réseau sont séparés d'une demi-longueur d'onde, ce qui assure un échantillonnage spatial optimal.

Initialement, on fait émettre aux dix transducteurs du centre (éléments 58 à 67) 3 arches de sinusoides, soit une impulsion d'environ 1 μ s. Le réseau de transducteur réalise un échantillonnage spatial du champ ultrasonore rétrodiffusé. Sur chaque transducteur, le signal est digitalisé sur 9 bits à une fréquence de 20 MHz. Les 250 μ s de signal sont alors retournés temporellement et ré émis dans le milieu, ce qui crée l'onde ultrasonore retournée temporellement qui se propage dans le même milieu.

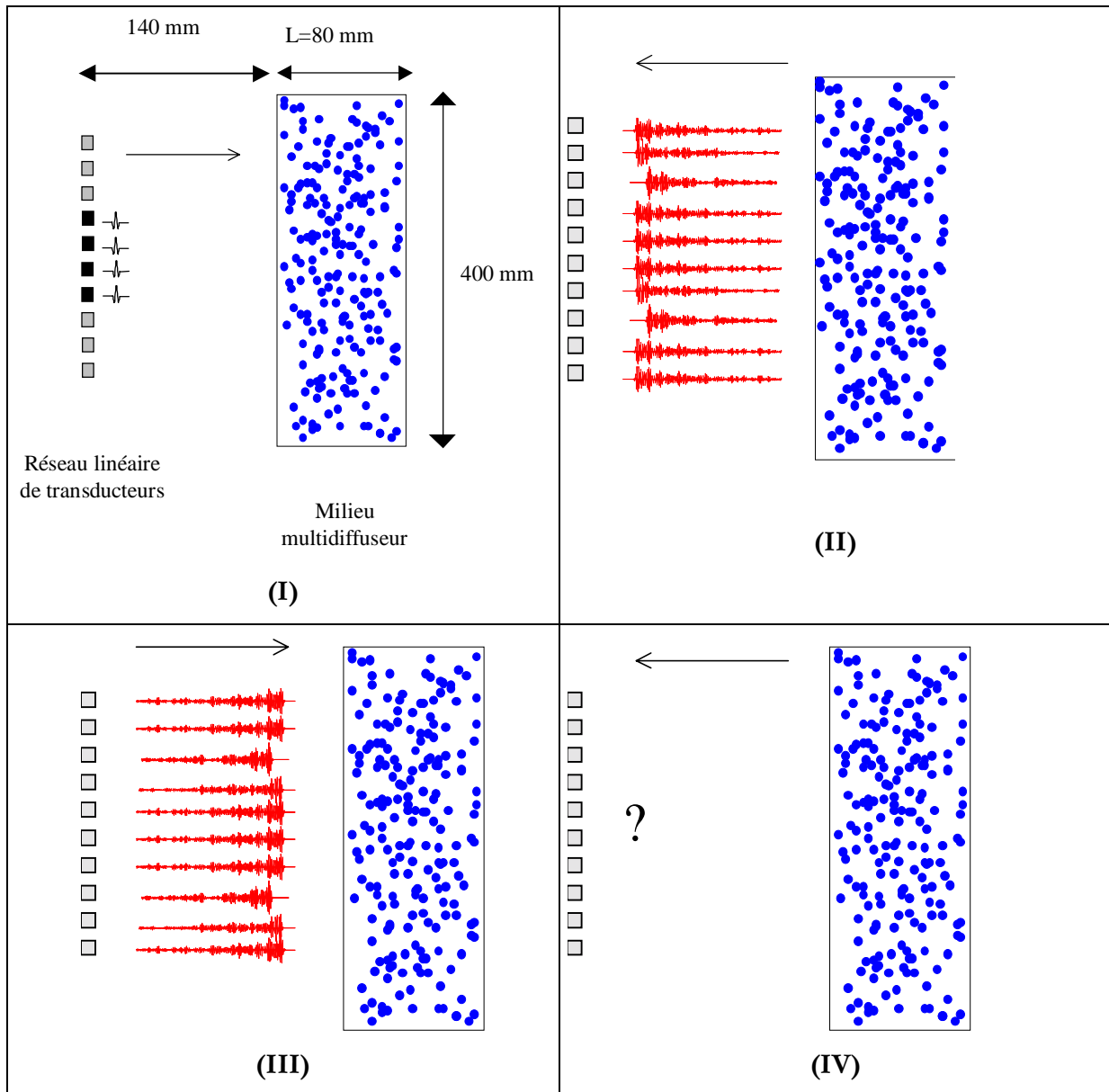


Fig. 17. Expérience de retournement temporel en rétrodiffusion. La source est constituée des éléments 58 à 67 du réseau émettant 3 arches de sinusoides.

On assiste alors sur les dix transducteurs source à une étonnante compression temporelle qui reconstruit un signal de $1 \mu\text{s}$. L'image de la source est ainsi recréée sur le réseau (Fig. 18) ce que l'on a choisi d'appeler l'effet « miroir »

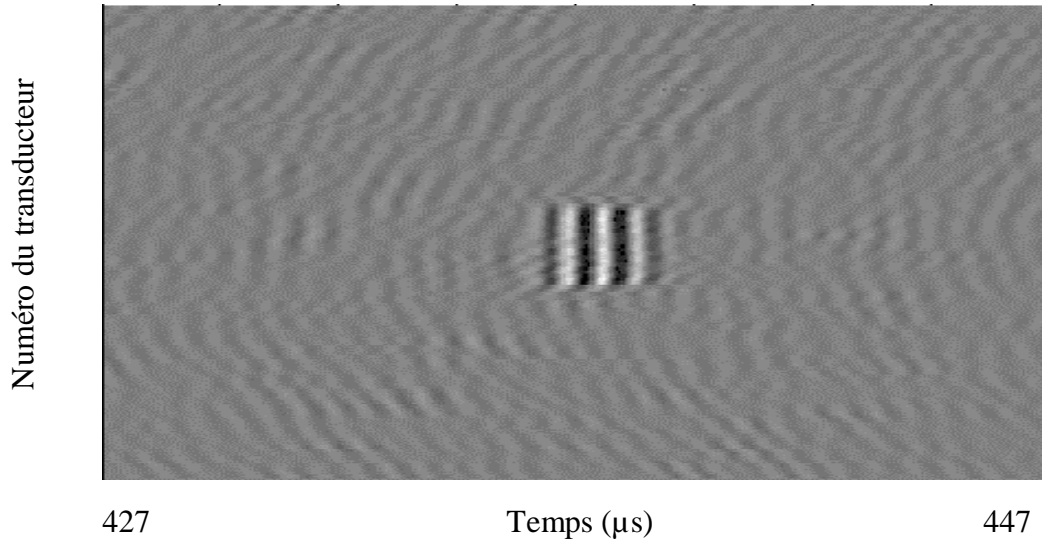


Fig. 18. Image B-Scan du signal recréé sur la source par retournement temporel.

Diagramme de directivité

Afin de caractériser la finesse de la focalisation spatiale, on renouvelle l'expérience précédente mais en utilisant un transducteur unique (l'élément #64 du réseau) comme nouvelle source. Le diagramme de directivité de l'onde retournée temporellement est simplement obtenu en retenant sur chaque transducteur le maximum du champ de pression (Fig. 19).

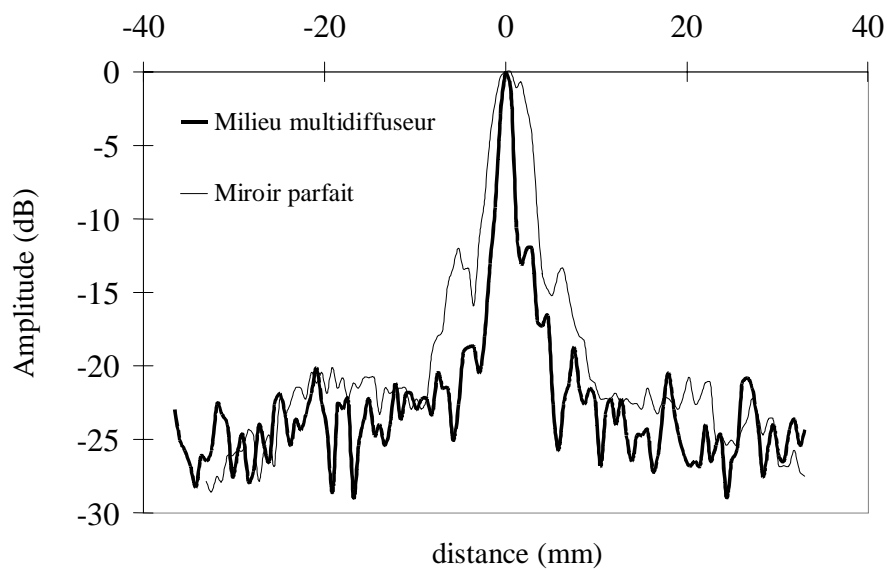


Fig. 19 Diagramme de directivité de l'onde retournée temporellement mesuré sur le réseau.

Si le milieu multidiffuseur est remplacé par une interface parfaitement réfléchissante, le diagramme de directivité est simplement limité par l'ouverture du réseau comme dans l'expérience en transmission en milieu homogène. Dans ce cas, la tache focale est moins fine et présente un niveau de lobes plus élevé (Fig. 19). La conclusion est donc la même que dans l'expérience en transmission. Non seulement nous parvenons à refocaliser l'onde sur sa source mais, plus encore, nous tirons bénéfice du désordre pour focaliser mieux qu'en milieu homogène aussi bien en termes de résolution qu'en termes de niveau de lobes.

Dans cette expérience, nous avons utilisé tout le signal multidiffusé. L'étude de l'évolution de la tache focale en fonction de la fenêtre de retournement temporel permet de comprendre comment le MRT permet de reconstruire un spectre spatial plus large en profitant du milieu diffuseur.

4.2.2.2. Retournement temporel dynamique

Dans la configuration qui vient d'être décrite, on sélectionne cette fois une fenêtre de retournement temporel de largeur $\Delta T = 5\mu s$ dont l'origine est translatée de $t = 0\mu s$ à $t = 12\mu s$ par pas de $1\mu s$ (Fig. 20).

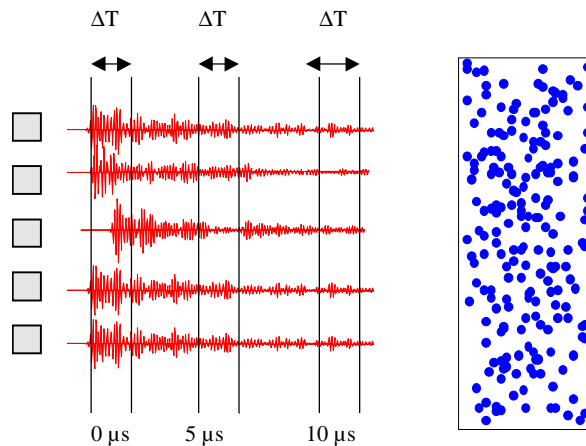


Fig. 20. On sélectionne dans le signal rétrodiffusé des fenêtres temporelles glissantes de largeur $\Delta T = 5\mu s$

Pour chaque position de la fenêtre, le signal sélectionné sur chacun des transducteurs est retourné temporellement et ré émis. En notant le maximum de pression reçu sur chacun des transducteurs après repropagation de l'onde retournée temporellement, on peut définir le

diagramme de directivité pour cette position de la fenêtre. Nous donnons Fig. 21 trois exemples de tache focale ainsi obtenue.

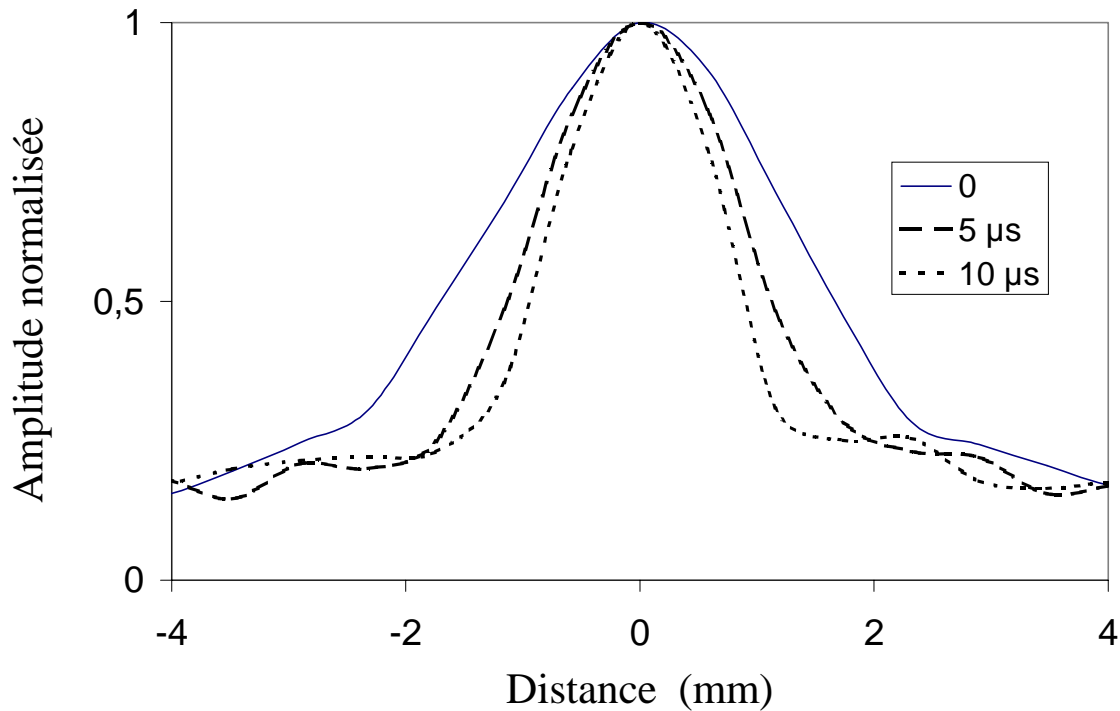
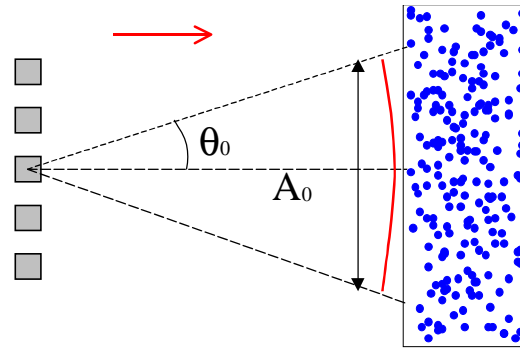


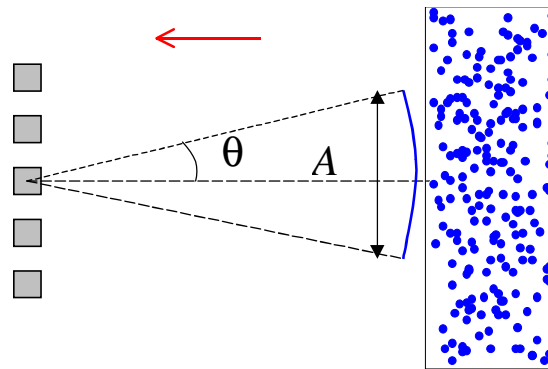
Fig. 21. Diagrammes de directivité obtenus pour trois fenêtres temporelles différentes.

On remarque que la tache focale s'affine, ce qui réciproquement indique que la largeur angulaire du front d'onde sortant de l'échantillon après retournement temporel croît avec le temps. Notre échantillon se comporte donc comme une lentille acoustique dont l'ouverture dépend du temps.

La figure 22 illustre l'idée simple sur laquelle est fondée notre théorie. Le front recréé à la sortie de l'échantillon, après propagation de l'onde retournée temporellement, se comporte comme une source secondaire dont les caractéristiques vont conditionner la qualité de la focalisation. Dans le meilleur des cas, si on retourne tout le signal et si le retournement temporel est parfait, ce front est le front initial d'illumination. Lorsqu'on sélectionne seulement une partie du signal dans une fenêtre de retournement temporel donnée, la source secondaire est caractérisée par une ouverture angulaire $\theta \leq \theta_0$. Or, cet angle θ est l'angle maximum qui a été enregistré dans la fenêtre de retournement temporel repérée par sa position t par rapport au premier écho reçu.



(I)



(II)

Fig. 22. (I) Le transducteur source génère un front ultrasonore d'ouverture θ_0 dont la largeur à -6dB est A_0 lorsqu'il intercepte l'échantillon. (II) Pour une fenêtre temporelle donnée, le front recréé à la sortie de l'échantillon est caractérisé par une largeur $A \leq A_0$ et une ouverture $\theta \leq \theta_0$.

Autour de 1.4 MHz, la section efficace différentielle de diffusion d'une tige est telle qu'elle est susceptible de réfléchir de l'énergie vers l'arrière dans toutes les directions (cf. chapitre 1) et donc en particulier dans la direction incidente. Dans un modèle de rayons (Fig. 23), le temps $t(\theta)$ nécessaire à enregistrer sur le réseau l'information angulaire θ est donc simplement donné par :

$$t = 2 \frac{F}{c} \left(\frac{1}{\cos(\theta)} - 1 \right) \quad (10)$$

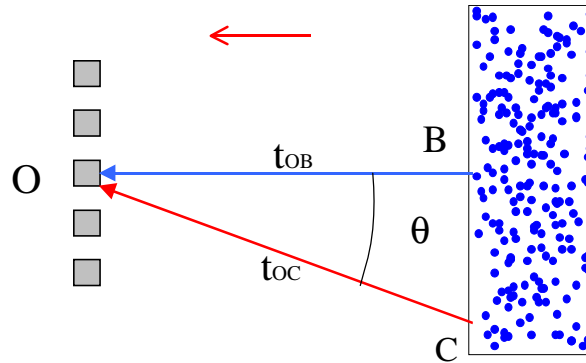


Fig. 23. Le premier écho enregistré sur le réseau est celui provenant du point B. Compte tenu de la section efficace différentielle de diffusion d'une tige à 1.4 MHz, tout autre point C atteint par le front incident réfléchit de l'énergie dans toutes les directions, en particulier dans la direction incidente. Il est donc simple de relier l'angle θ au temps $t = t_{OC} - t_{OB}$ d'enregistrement de l'onde diffusée par le point C (Eq. 10).

A ce stade, notre modèle n'est fondé que sur la contribution des ondes diffusées sur la première rangée de tiges. Mais si l'échantillon n'est effectivement constitué que d'une rangée de tiges, sélectionner une fenêtre de retournement temporel à un instant $t(\theta)$ ne permet de reconstruire que les extrémités du spectre angulaire du front d'incident (Fig. 24).

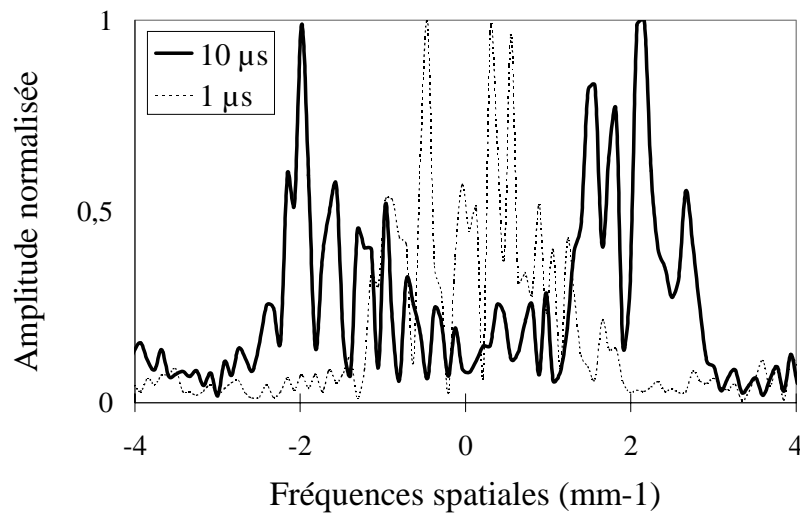


Fig. 24. Transformées de Fourier spatiales du signal enregistré sur le réseau de transducteurs pour deux fenêtres temporelles différentes dans le cas où l'échantillon n'est constitué que d'une rangée de diffuseurs. Le spectre angulaire est plus large pour une fenêtre plus lointaine mais entre ses deux extrémités, des fréquences spatiales sont perdues

Dans ce cas, on s'attend à une tache focale interprétable comme la figure d'interférences produite par deux sources étroites séparées d'une distance $D = 2F \sin(\theta)$. Par exemple, on présente Fig. 25 la tache focale obtenue dans le cas où le milieu diffuseur n'est constitué que d'une seule rangée de tiges pour une fenêtre située $10 \mu\text{s}$ après le premier écho.

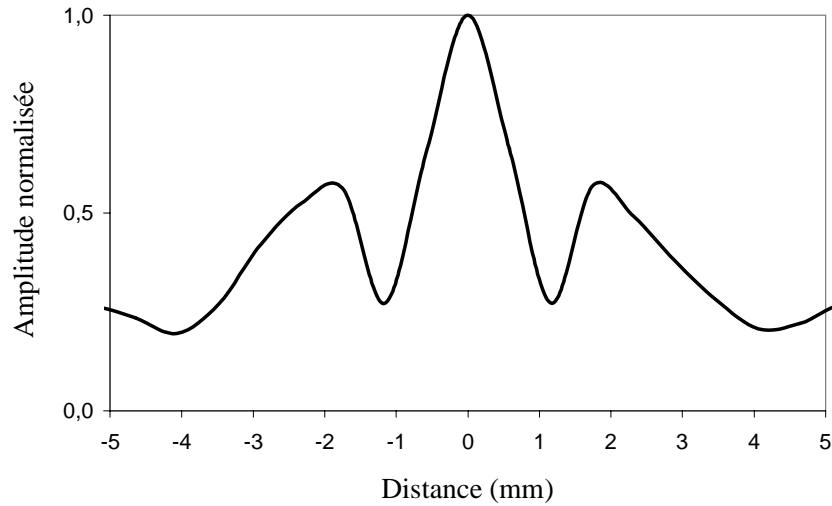


Fig. 25. Tache focale obtenue en utilisant une fenêtre de retournement temporel de largeur $\Delta T = 5 \mu\text{s}$ située $t = 10 \mu\text{s}$ après le premier écho. On vérifie que la distance entre deux maxima est de l'ordre de $\lambda F / D$.

Elle est différente des taches focales obtenues avec le milieu épais (Fig. 21) aussi bien en résolution qu'en niveau de lobes.

C'est là qu'intervient le rôle joué par la diffusion multiple. En effet, grâce aux chemins multiples, on enregistre, dans chaque fenêtre, des échos provenant de tous les points de la face d'entrée de l'échantillon (Fig. 26).

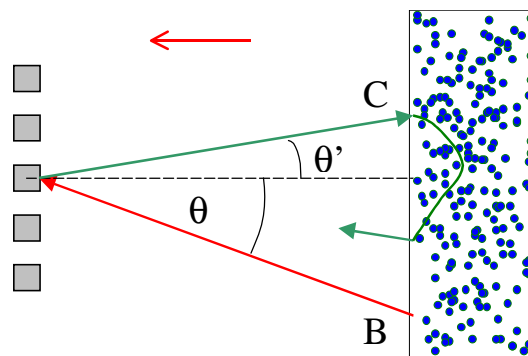


Fig. 26. Dans une fenêtre de retournement temporel contenant l'information angulaire maximale θ , on enregistre également grâce aux chemins multiples les angles $\theta < \theta'$.

Quelle que soit la fenêtre de retournement temporel choisie, toutes les fréquences spatiales sont présentes avec à peu près le même poids (Fig. 27).

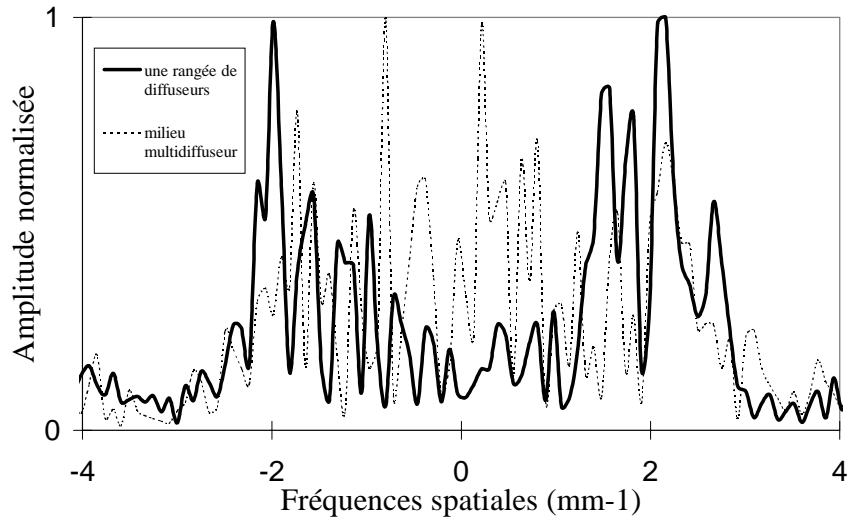


Fig. 27. Transformées de Fourier spatiales du signal rétrodiffusé enregistré dans une fenêtre située $t = 10\mu\text{s}$ après le premier écho pour l'échantillon d'épaisseur $L = 80\text{mm}$.

Il est alors raisonnable de modéliser la source secondaire par un transducteur concave de rayon de courbure F et d'ouverture $D = 2F \sin(\theta)$ qui produit une tache focale de largeur à mi-hauteur donnée par :

$$\delta = 1.2 \frac{\lambda F}{D} \quad (11)$$

En utilisant cette formule, on déduit de la mesure expérimentale de $\delta(t)$ la valeur de l'angle θ , et donc l'évolution de $1/\cos(\theta)$ en fonction de la position t de retournement temporelle (Fig. 28).

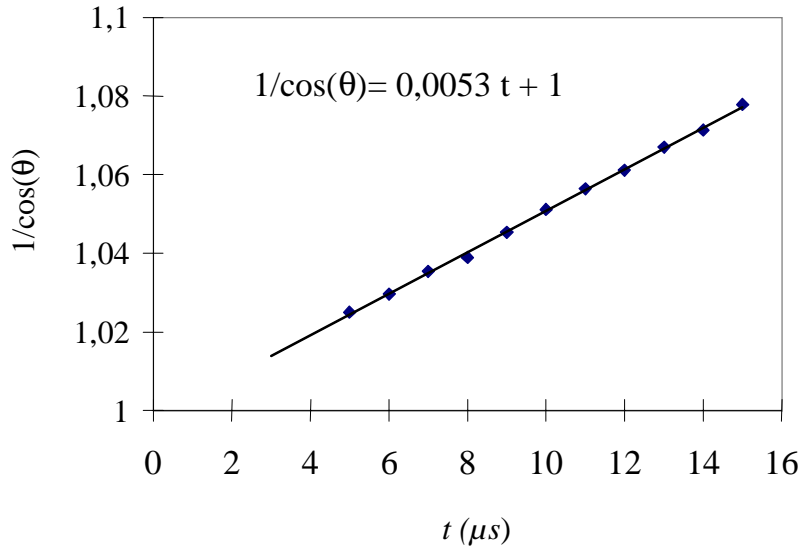


Fig. 28. Evolution de la largeur angulaire du front recréé en sortie d'échantillon en fonction de la position du début de la fenêtre de retournement temporel.

Conformément aux prédictions de la relation (10), on obtient une droite dont la pente vaut bien $2F/c$.

Finalement, nous avons un modèle simple permettant d'expliquer l'évolution de la tache focale en fonction du temps. Dans une fenêtre de retournement temporel donnée, la diffusion de l'onde ultrasonore sur la première rangée de tiges permet d'enregistrer l'angle θ correspondant au temps d'aller-retour du rayon, incliné de cet angle, entre le milieu et le réseau. Grâce aux chemins multiples, on récupère également les angles $\theta' < \theta$, ce qui permet la reconstruction de tout le spectre angulaire entre les angles θ et $-\theta$. Finalement, l'ouverture recréée par retournement temporel à la sortie de l'échantillon se comporte comme une source secondaire qui peut être modélisée par un transducteur concave.

On tire donc de ce modèle empirique une conclusion importante. Quelle que soit l'histoire de l'onde ultrasonore dans le milieu, c'est le front recréé à la sortie de l'échantillon qui conditionne la qualité de la tache focale. Si l'échantillon est suffisamment large pour intercepter complètement le front d'illumination et si le retournement temporel est parfait, c'est-à-dire se déroule sans aucune perte d'information, on récupère en sortie d'échantillon le front d'illumination incident. L'évolution temporelle de la tache focale obtenue n'est donc pas une empreinte directe des caractéristiques du milieu comme peut l'être le cône de rétrodiffusion cohérente.

4.3. Retournement temporel 1 bit

Parmi toutes les perturbations possibles apportées à l'onde retournée temporellement, les effets de quantification sont d'une importance pratique capitale. L'objet de ce paragraphe est d'étudier les conséquences d'une réduction du nombre de bits sur lequel on numérise le signal multidiffusé.

Le montage expérimental utilisé est celui présenté Fig. 3. La distance entre la source et le réseau est de 32 cm. Nous avons étudié deux échantillons d'épaisseurs $L = 15\text{mm}$ et $L = 40\text{mm}$. Nous présentons figures 29 (a) et 30 (a) les signaux enregistrés sur le transducteur #64 à travers ces deux échantillons. Les figures 29 (b) et 30 (b) montrent la compression temporelle observée au point source après retournement temporel de l'onde quantifiée sur 9 bits. Les diagrammes de directivité sont présentés sur la figure 31. Dans les deux cas, on obtient une résolution latérale de 1 mm et un niveau de lobes assez stable autour de -23 dB.

Dans une seconde expérience, les signaux multidiffusés sont quantifiés sur 1 bit. Autrement dit, la seule information enregistrée et retournée temporellement est le signe de l'onde multidiffusée. Les compressions temporelles obtenues au point source sont présentées figures 29 (c) et 30 (c). Malgré la quantification de l'onde retournée temporellement sur 1 bit, la compression temporelle est toujours excellente. Plus étonnant encore, l'amplitude du pic est 2.9 fois plus importante pour $L = 15\text{mm}$ et 3.9 fois plus importante pour $L = 40\text{mm}$. Pour ce qui concerne le diagramme de directivité de l'onde retournée temporellement, la résolution est la même (Fig. 31) et le niveau de lobes est même inférieure de 1.2 dB !

Finalement, le retournement temporel 1 bit a augmenté l'amplitude de la compression temporelle et le rapport signal sur bruit du diagramme de directivité tout en conservant la même résolution latérale.

Erreur! Liaison incorrecte.

(a)

Erreur! Liaison incorrecte.

(b)

Erreur! Liaison incorrecte.

(c)

Erreur! Liaison incorrecte.

(a)

Erreur! Liaison incorrecte.

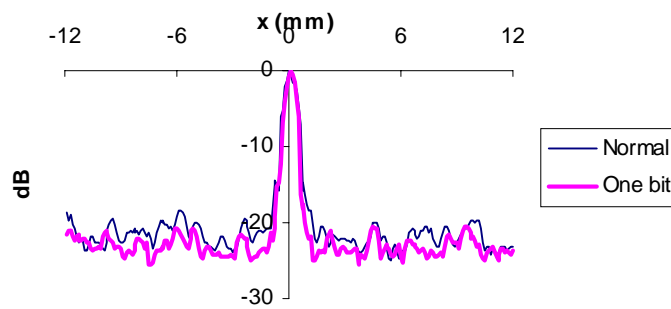
(b)

Erreur! Liaison incorrecte.

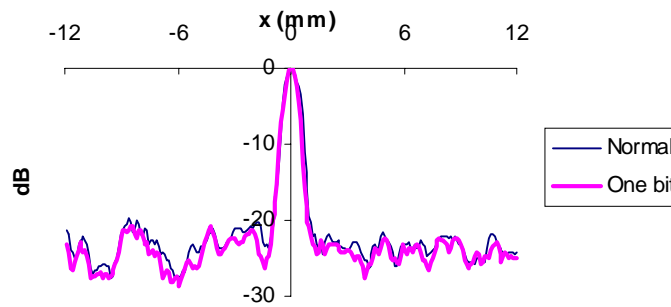
(c)

Fig.29 : Signal transmis à travers les tiges ($L=15$ mm), enregistré sur l'élément #64 (a). Signal recréé sur la source après retournement temporel normal (b) ou 1 bit (c). Les amplitudes sont normalisées par le maximum de (b)

Fig.30 : Signal transmis à travers les tiges ($L=40$ mm), enregistré sur l'élément #64 (a). Signal recréé sur la source après retournement temporel normal (b) ou 1 bit (c). Les amplitudes sont normalisées par le maximum de (b)



(a)



(b)

Fig. 31 : Diagrammes de directivité obtenus par retournement temporel normal et 1 bit. (a) $L=15$ mm. (b)

$L=40$ mm. La largeur à mi-hauteur vaut 1 mm.

Arnaud Derode [14] a développé un modèle permettant d'expliquer ces résultats surprenants. Nous en résumons ici l'esprit.

Résolution latérale

Une partie de l'explication vient de la propriété de réciprocity du milieu. Supposons que nous n'utilisons qu'un seul élément du MRT situé en M, la source étant située en S (cf. paragraphe 2.4). En vertu de la propriété de réciprocity, retourner temporellement une onde et la faire repropager dans le milieu est analogue à une corrélation dans l'espace et dans le temps. En effet, comme nous l'avons vu au paragraphe 2.4, le signal recréé sur la source est donné par $s(t) = \int h(\theta)h(t+\theta)d\theta$ où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle de l'ensemble source-milieu-récepteur. Du fait de la propagation de l'onde dans la forêt de tiges désordonnée, cette réponse impulsionnelle présente un caractère aléatoire. Le signal $\int h(\theta)h(t+\theta)d\theta$ peut alors être vu comme un estimateur de la fonction d'autocorrélation temporelle du champ $h(t)$ reçu sur le détecteur. Définissons le signal $b(t)$ tel que :

$$b(t) = \begin{cases} 1 & h(t) \geq 0 \\ -1 & h(t) < 0 \end{cases}$$

Après retournement temporel 1 bit, le signal recréé sur la source est cette fois $b(-t) \otimes h(t) = \int b(\theta)h(t+\theta)d\theta$. Réduire le nombre de bits change certainement l'amplitude et la variance d'un signal aléatoire mais pas son temps de corrélation. Si $h(t_1)$ et $h(t_2)$ sont décorrelés, $b(t_1)$ et $h(t_2)$ le seront aussi.

On retrouve le même argument pour la variable d'espace. Le signal reçu en O au temps $t=0$ s'écrit $\int h(S,M,\theta)h(M,O,\theta)d\theta$. Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.4, cette expression définit le diagramme de directivité de l'onde retournée temporellement autour du point source. En vertu de la réciprocity, $h(S,M,\theta)$ est aussi le signal qui serait reçu en S si la source était en M. Par conséquent, on peut imaginer que la source est en M et que l'on s'intéresse au champ transmis en O et en S. La fonction de corrélation spatiale est définie comme $E\{h(\mathbf{r},t)h(\mathbf{r}',t)\}$. La résolution spatiale du système est donc une estimation de la longueur de corrélation du champ diffusé. Or, cette longueur dépend de la taille du 'halo' de diffusion en vertu du théorème de Van Cittert Zernike [15]. Digitaliser les signaux sur 1 bit n'a pas non plus d'influence sur la longueur de corrélation du champ ondulatoire. Si deux points d'observation reçoivent des informations décorrelées, ces dernières le seront toujours après quantification sur 1 bit.

Puisque réduire le nombre de bits ne change ni le temps de corrélation, ni la longueur de corrélation, cela n'affecte ni la largeur de la compression temporelle, ni la résolution à -6 dB, tout du moins en moyenne.

Amplification

Dans la pratique, les signaux reçus sur le réseau sont normalisés avant d'être ré-émis. Si $m = \max_t h(t)$, on reçoit donc sur la source le signal $s(t) = \frac{1}{m} \int h(\theta)h(\theta + t)d\theta$ après retournement temporel normal et $s_1(t) = \frac{1}{m} \int h(\theta)b(t + \theta)d\theta$ après retournement temporel 1 bit. Le rapport des amplitudes au temps $t = 0$ est donc donné par :

$$\frac{s_1(t=0)}{s(t=0)} = \frac{\int |h(\theta)d\theta|}{\frac{1}{m} \int h^2(\theta)d\theta} = \frac{\int |h(\theta)/m d\theta|}{\int h^2(\theta)/m^2 d\theta}$$

Puisque $h(\theta) < m$, le rapport est toujours supérieur à 1. L'amplitude du pic recréé par retournement temporel 1 bit est donc toujours supérieur.

En calculant la valeur attendue et la variance du signal reçu sur la source après retournement temporel, Arnaud Derode a pu expliquer quantitativement les facteurs d'amplification observés expérimentalement [14].

Diagramme de directivité

Le fait que le retournement temporel 1 bit puisse être jugé meilleur quant au rapport signal sur bruit du diagramme de directivité tient à la définition que nous en avons donnée, c'est-à-dire le maximum de pression pour chaque position \mathbf{r} : $d(\mathbf{r}) = \max_t \{s(\mathbf{r}, t)\}$. On aurait pu tout aussi bien le définir en intégrant l'énergie totale soit : $d(\mathbf{r}) = \int s^2(\mathbf{r}, t) dt$. Avec cette définition, le niveau de lobes devient plus élevé dans le cas du retournement temporel 1 bit (Fig. 32).

Erreur! Liaison incorrecte.

Fig. 32. Diagrammes de directivité obtenus en intégrant l'énergie reçue au point source ($L = 15\text{mm}$).

Avec le RT 1 bit, la valeur maximale de la variance peut être plus faible mais celle-ci est distribuée plus uniformément dans le temps. La contribution du bruit est donc plus importante quand on intègre sur le temps. Si le critère retenu est plutôt celui de la valeur maximale pour chacune des positions, la diagramme de directivité peut en effet apparaître meilleur dans le cas du RT 1 bit.

Finalement, le retournement temporel 1 bit dans un milieu complexe diffuseur permet d'amplifier la compression temporelle tout en conservant la même finesse de focalisation. Les applications potentielles de cette idée sont nombreuses. Le RT 1 bit pourrait s'avérer particulièrement intéressant pour générer des impulsions de très grande puissance pour la lithotritie (destruction des calculs rénaux par ultrasons) ou pour des études d'acoustique non linéaires.

5. Modification du milieu de propagation

Dans le paragraphe précédent, nous avons évalué l'effet d'une perturbation de l'onde retournée temporellement sur la qualité de la recompression temporelle et de la refocalisation. Entre autres conclusions surprenantes, nous avons constaté que sélectionner une fenêtre de retournement temporel située loin dans le signal multidiffusé, loin de nous pénaliser, permet d'améliorer la résolution. En effet, plus l'onde a voyagé longtemps dans le milieu, plus elle porte d'information.

Dans le prochain paragraphe, nous cherchons à apprécier la robustesse du retournement temporel vis à vis d'une perturbation globale (5.1) ou locale (5.2) du milieu de propagation.

5.1. Modification de la température du milieu : une perturbation globale.

Dans cette expérience, nous suivons la capacité de l'onde à refocaliser sur sa source lorsque la température du milieu est modifiée. Le schéma expérimental est identique à celui présenté Fig. 3.

L'eau de la cuve est chauffée depuis sa température d'équilibre $T = 22.3^{\circ}\text{C}$ jusqu'à $T = 24.9^{\circ}\text{C}$. Puis on la laisse se refroidir naturellement. Le contrôle de température se fait au moyen de deux thermocouples placés de part et d'autre de l'échantillon dans des logements prévus à cet effet. Pendant le refroidissement, nous réalisons pour différentes températures deux types de mesures.

Dans un premier type d'expériences « stationnaires », une fenêtre de retournement temporelle comprise entre 0 et $120\mu\text{s}$, grande devant la largeur de l'impulsion initiale, est retournée temporellement et ré émise. On note alors pour chaque température l'amplitude de la compression temporelle au point source ainsi que le décalage éventuel de son temps d'arrivée (Fig. 33 et 34).

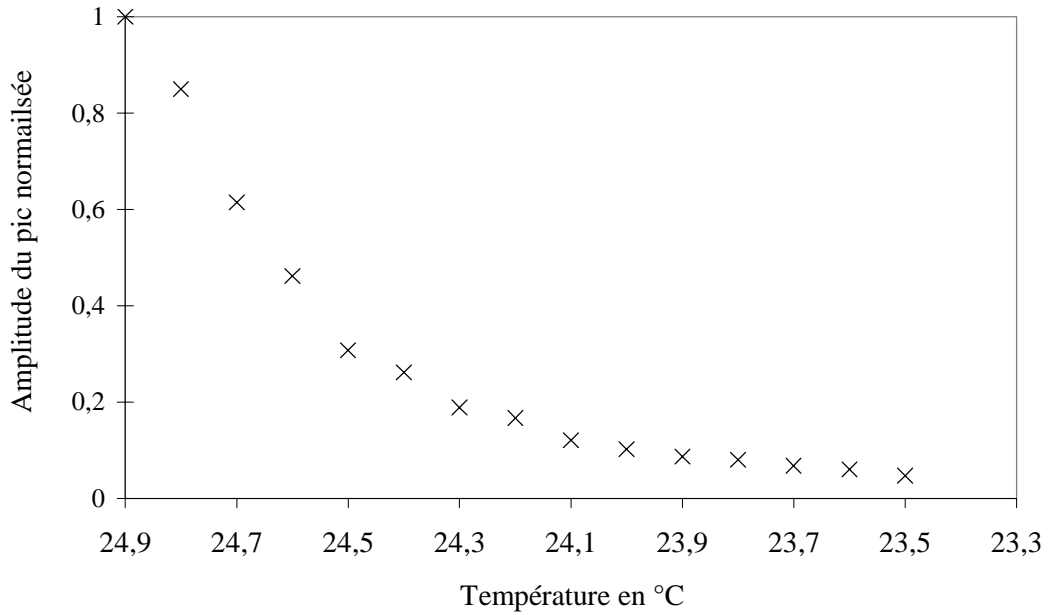


Fig. 33. Evolution de l'amplitude du pic en fonction de la température du milieu

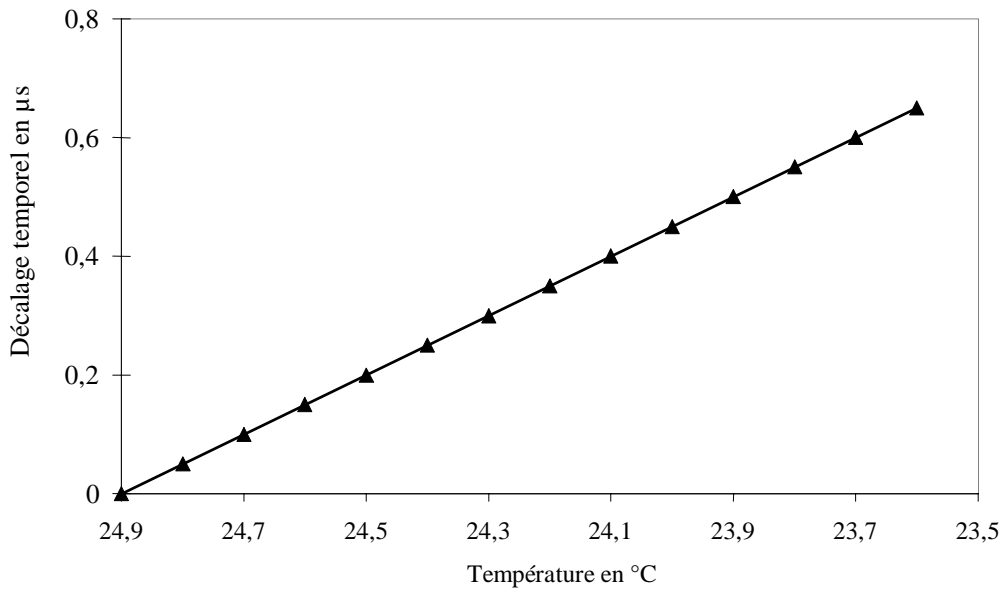


Fig. 34. Décalage temporel du pic en fonction de la température

Comme on pouvait s'y attendre, on assiste à une chute de la compression temporelle qui s'explique par la variation de la vitesse des ultrasons dans le milieu. Cette dépendance de la célérité en fonction de la température peut être exprimée sous la forme simplifiée [15] :

$$c(T) = 1.4492 + 4.610^{-3}T - 0.05510^{-3}T^2 + 0.0002910^{-3}T^3$$

où c est exprimée en $mm/\mu s$.

Dans le domaine de température exploré, la vitesse croît linéairement avec la température (Fig. 35).

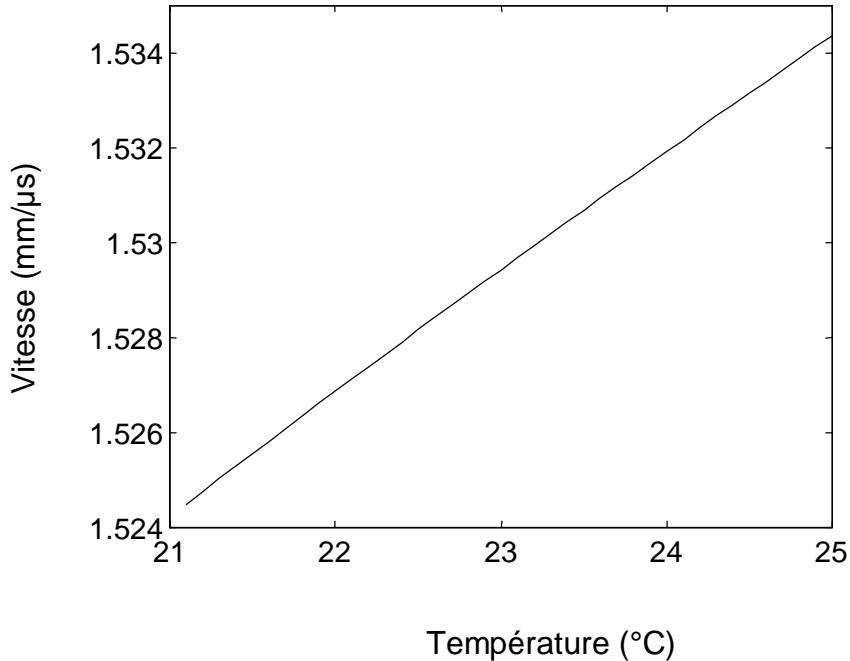


Fig. 35. Evolution de la vitesse du son avec la température

La variation de vitesse est de $\Delta c = 2,5 \mu m / \mu s / ^\circ C$. Or, on s'attend à ce que le pic ait diminué de moitié lorsque la longueur des chemins les plus courts a subi une perturbation de l'ordre de $\lambda/2$. Le temps d'arrivée de la première impulsion est $t_a = 195 \mu s$. La variation de longueur du chemin correspondant est donc de l'ordre de $t_a \Delta c = 0,5 mm / ^\circ C$. Pour la longueur d'onde centrale $\lambda_c = 0,48 mm$, une perturbation d'un demi degré est donc suffisante pour diminuer le pic de moitié.

Par ailleurs, le décalage attendu de la compression temporelle est de l'ordre de $t_a \Delta c / c \approx 0.0326 \mu s / ^\circ C$, valeur susceptible d'expliquer l'évolution observée sur la figure 34.

Des mesures dynamiques permettent de préciser les choses. Nous sélectionnons dans le signal stocké dans l'ordinateur des fenêtres de retournement temporel glissantes de largeur $\Delta T = 5 \mu s$. De la même façon, nous notons pour chacune de ces fenêtres l'amplitude du pic de refocalisation, ce qui donne accès, pour chaque température, à l'évolution temporelle de la sensibilité du champ ondulatoire. Nous représentons Fig. 35 la variation de la perturbation $\delta T_{1/2}$ nécessaire à diminuer le pic de moitié en fonction de la fenêtre de retournement sélectionnée.

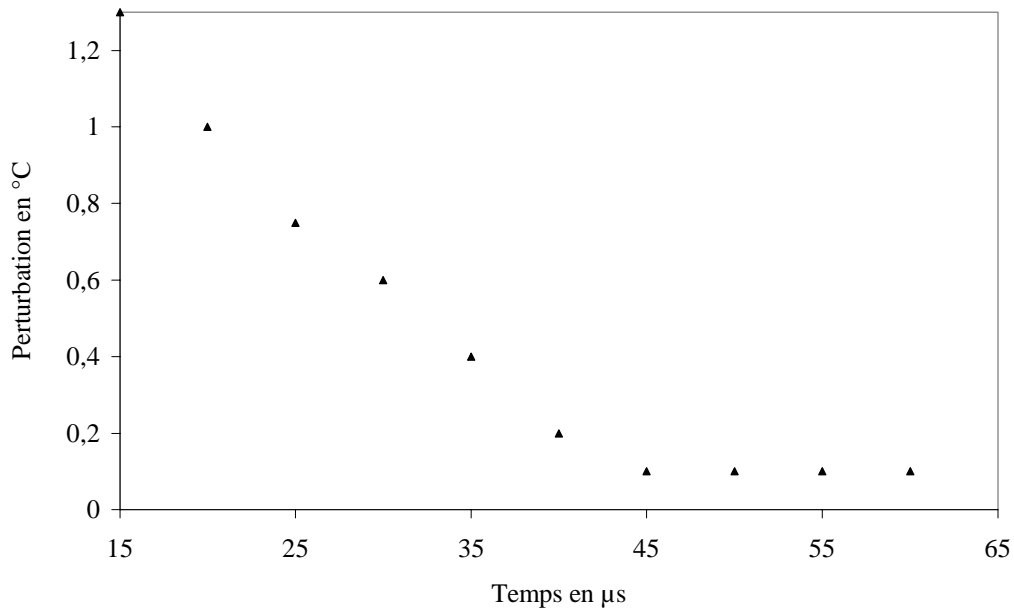


Fig. 35. Variation en fonction de la fenêtre de retournement temporel de la perturbation nécessaire à diminuer l'amplitude du pic de moitié.

La perturbation critique est d'autant moins importante que l'on sélectionne une fenêtre temporelle loin dans le signal multidiffusé. En tenant le même raisonnement que précédemment, on s'attend à ce que $\delta T_{1/2} = \lambda / 2\Delta ct_f$ où t_f représente le début de la fenêtre temporelle sélectionnée. Expérimentalement, la décroissance de la perturbation critique est plutôt linéaire. Quoiqu'il en soit, elle est algébrique. Dans une expérience analogue avec des particules, la décroissance en fonction du temps de la perturbation critique est de nature exponentielle [12].

5.2. Soustraction de diffuseurs

On s'intéresse ici à l'effet d'une perturbation locale du milieu de propagation. Le schéma expérimental est présenté Fig. 36. Le milieu étudié est d'épaisseur $L = 40\text{mm}$. Cette fois, avant de renvoyer dans le milieu l'onde retournée temporellement, on enlève une ou plusieurs tiges au centre de l'échantillon dans l'axe du faisceau ultrasonore.

Contrairement au cas précédent, la perturbation apportée à l'onde est drastique. En effet, enlever 1 tige dont le rayon vaut 0,4 mm, soit une longueur d'onde, revient d'emblée à déphaser suffisamment tous les chemins qui passaient par ce diffuseur pour qu'ils ne puissent participer à la recompression temporelle sur le point source.

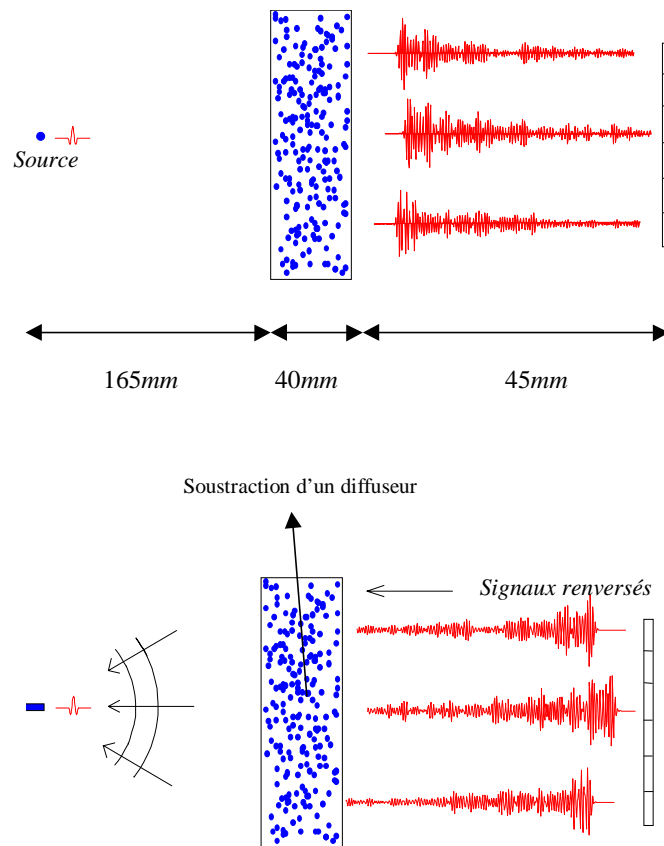


Fig. 36. Schéma expérimental pour l'étude du retournement temporel lorsque le milieu est modifié entre l'aller et le retour par soustraction d'une ou plusieurs tiges.

On choisit de mesurer la « probabilité de retour sur l'état initial » par l'amplitude de la compression temporelle au point source. On étudie son évolution en fonction du nombre de tiges enlevées d'une part et de la position de la fenêtre de retournement temporel d'autre part. En particulier, on peut ainsi étudier l'évolution temporelle de la perturbation $\delta n_{1/2}$ nécessaire à diminuer de 50 % la compression temporelle au point source.

Evolution de l'amplitude du pic en fonction de l'importance de la perturbation.

Dans cette expérience, la totalité du signal diffusé est retourné temporellement et ré émis par tous les transducteurs du réseau. On présente Fig. 37 l'évolution de l'amplitude normalisée du pic en fonction du nombre de tiges enlevées dans le milieu. L'expérience est renouvelée quatre fois afin de moyenner les résultats.

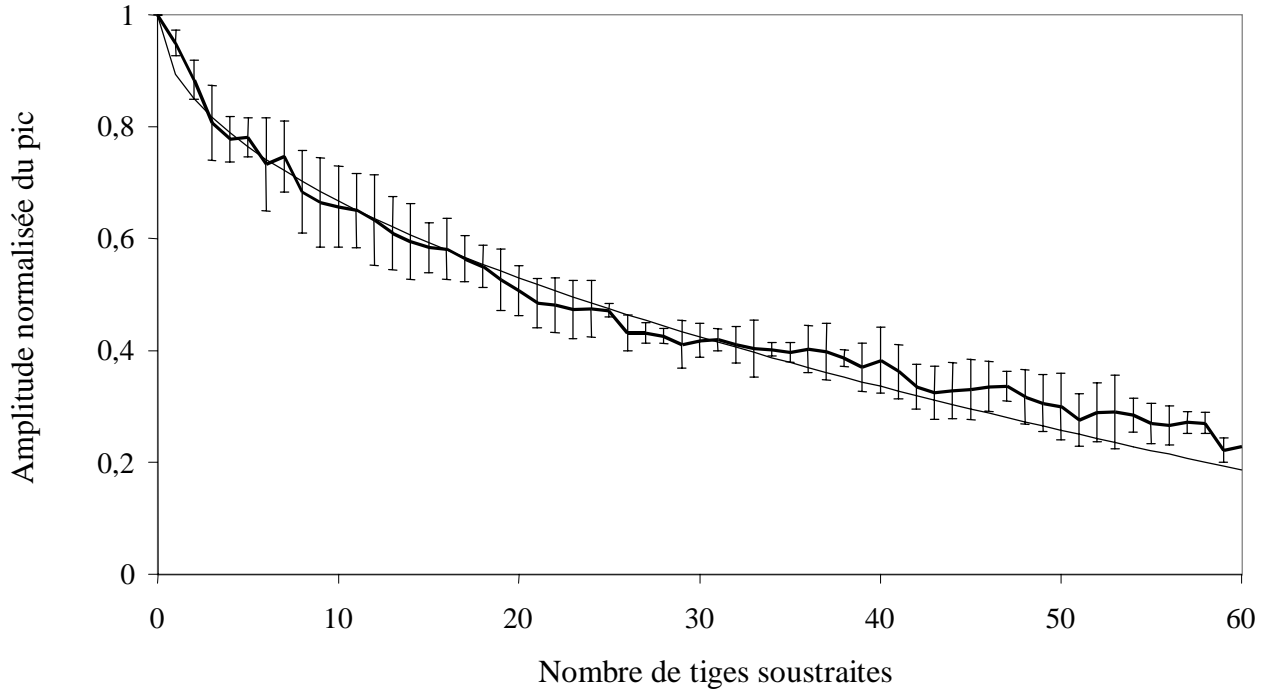


Fig. 37. Evolution de l'amplitude moyenne de la compression temporelle en fonction du nombre de tiges soustraites. Trait épais : expérience, trait fin : prédiction théorique.

Une quinzaine de tiges sont nécessaires à diminuer l'amplitude du pic de moitié. Lorsque 60 tiges ont été enlevées, on conserve trace de la compression temporelle. Il est nécessaire d'enlever une centaine de tiges, soit presque toute l'épaisseur de l'échantillon, pour la faire disparaître complètement.

L'interprétation de cette courbe est la suivante. Appelons $h(t)$ la réponse impulsionnelle de la source jusqu'au réseau. Au retour, le milieu ayant été modifié, la propagation est décrite par une nouvelle réponse impulsionnelle $g(t)$. Le retournement temporel réalise naturellement le produit de convolution $h(t) \otimes g(-t)$. Lorsque le milieu n'est pas modifié, l'amplitude du pic mesure $h(t) \otimes h(-t)|_{t=0} = \int h^2(t) dt$, c'est à dire l'énergie du signal transmis. L'amplitude normalisée $\frac{h(t) * g(-t)}{h(t) * h(-t)} \Big|_{t=0}$ permet donc d'apprécier la baisse d'énergie consécutive à la perte des chemins qui passaient par les tiges ôtées.

Si T est la taille transverse du halo ultrasonore à la profondeur où les tiges sont enlevées, n la densité de diffuseurs et N le nombre de tiges soustraites à l'échantillon, on s'attend à ce que l'amplitude normalisée du pic suive une loi du type : $\frac{h(t) * g(-t)}{h(t) * h(-t)} \Big|_{t=0} = 1 - \frac{1}{T} \sqrt{N/n}$. Le fit de la

figure 37 utilise cette formule avec $T = 220\text{mm}$, valeur légèrement supérieure à la largeur du front balistique à cette profondeur.

Retournement temporel par fenêtre

On présente Fig. 38. l'évolution de l'amplitude du pic en fonction de l'ampleur de la perturbation pour différentes fenêtres de retournement temporel de largeur $\Delta T = 5\mu\text{s}$.

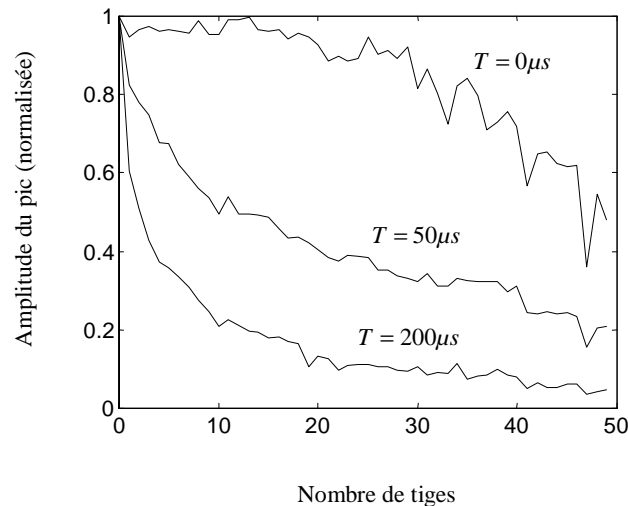


Fig. 38. Evolution de l'amplitude du pic en fonction du nombre de tiges enlevées pour différentes fenêtres de retournement temporel

Comme dans le cas stationnaire, pour chaque fenêtre de retournement temporel, l'amplitude diminue en fonction du nombre de tiges enlevées, ce qui est à relier au nombre croissant de chemins affectés par la perturbation. La première fenêtre contient le front balistique qui représente la partie de l'onde qui traverse le milieu « sans le voir » (cf. chapitre 1). C'est pourquoi l'amplitude du pic varie peu en fonction du nombre de tiges enlevées. Plus l'ordre de diffusion des chemins qui contribuent au signal enregistré dans une fenêtre temporelle donnée est important, plus faible est l'amplitude du pic, ce que l'on retrouve sur la figure 39.

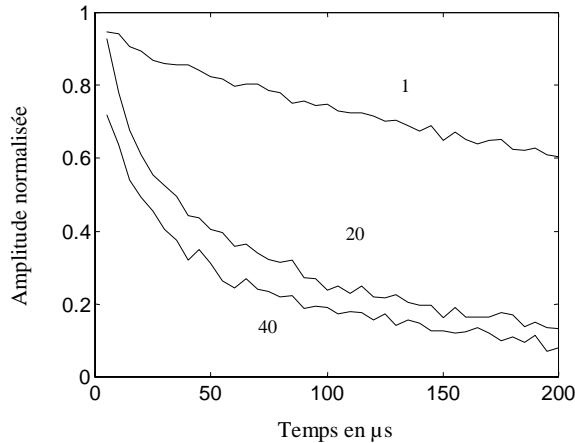


Fig. 39. Evolution de l'amplitude du pic en fonction du temps pour différentes perturbations du milieu.

A partir du faisceau de courbes de la figure 39, on peut définir la perturbation critique $\delta n_{1/2}$ comme le nombre de tiges nécessaires à diminuer le pic de moitié et son évolution en fonction du temps. Pour des ordres de diffusion peu élevés (jusqu'à 10 environ), $\delta n_{1/2}$ chute brutalement avant de se stabiliser.

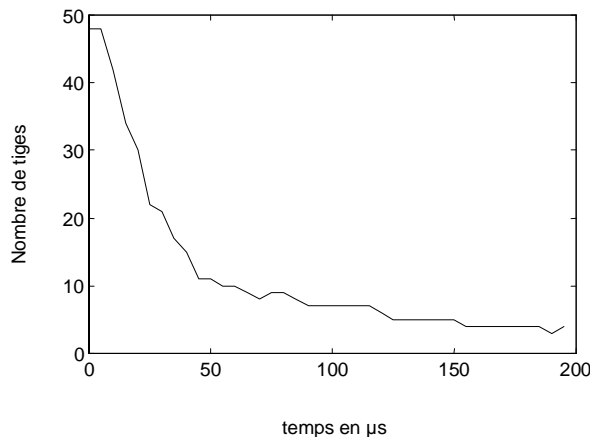


Fig. 40. Evolution de la perturbation minimale nécessaire à diminuer le pic de moitié en fonction du temps.

Pour les fenêtres les plus lointaines, la probabilité pour que le signal enregistré corresponde à des chemins qui ont « vu » la zone affectée devient telle qu'une perturbation faible (cinq tiges) suffit à diminuer l'amplitude du pic de moitié.

Cette expérience, contrairement à la précédente, ne marque pas une différence fondamentale avec un paquet de particules se propageant dans un milieu multidiffuseur (« gaz de Lorentz »). En effet, dans la situation classique, comme ici en physique ultrasonore, enlever une tige empêche tout chemin passant par cette tige de participer à la recompression temporelle. Par contre, cette expérience illustre bien le fait que la particularité d'une onde est d'explorer tous les chemins possibles à la fois. C'est pourquoi le pic ne diminue qu'en proportion du nombre de

chemins affectés et subsiste tant qu'une partie de l'onde n'a pas exploré la zone affectée. Autrement dit, tant que le milieu n'a pas été complètement détruit ou que la probabilité de l'onde de passer par la zone défectueuse ne devient pas proche de 1 (pour les fenêtres temporelles les plus lointaines), une trace de la compression temporelle est toujours observée au point source.

Finalement, nous avons pu apprécier dans ce chapitre la robustesse du retournement temporel pour une onde ultrasonore se propageant dans un milieu hétérogène à haut degré de désordre.

D'un point de vue théorique, les différentes expériences présentées ont mis en lumière les différences pouvant exister entre un paquet d'onde et un paquet de particules se propageant dans un milieu multidiffuseur. Dans une expérience classique, une perturbation du milieu ou des particules retournées temporellement se propage exponentiellement avec le temps et donc avec l'ordre de diffusion. Pour les ondes, dans l'exemple de la modification de la température, la propagation de l'erreur est algébrique. Une des clefs réside dans le fait qu'une onde générée par un point source explore tous les chemins possibles dans le milieu. C'est pourquoi une modification même drastique du milieu (exemple de la soustraction de tiges avant la repropagation de l'onde retournée temporellement) ne détruit pas complètement la recompression temporelle.

D'un point de vue pratique, commettre volontairement une erreur sur l'onde retournée temporellement peut s'avérer intéressant. C'est ainsi que le retournement temporel 1 bit permet d'augmenter l'amplitude du signal au point source tout en conservant la finesse de la focalisation. Lorsque le milieu de propagation évolue (température, introduction de défauts), le retournement temporel peut être un moyen de caractériser l'ampleur de la modification. Enfin la propagation lente des erreurs en fonction de l'ordre de diffusion offre la possibilité de retourner temporellement des fenêtres prises loin dans le signal. On profite ainsi du fait que l'onde est d'autant plus porteuse d'information qu'elle a voyagé longtemps pour améliorer la finesse de la focalisation.

REFERENCES

¹ L. E. Ballentine and J. P. Zibin, *Phy. Rev. A*, **54**, 3813 (1996)

² Jean-Louis Thomas, "Etude des miroirs à retournement temporel, Applications à la focalisation des ondes ultrasonores et à la lithotritie", Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1998.

³ Goodman, « Introduction to Fourier Optics », Mc Graw-Hill, Second Edition, 1996.

- ⁴ Mathias Fink, « Time Reversal of ultrasonics fields-Part I : Basic Principles », IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Control, vol 39, pp 555-566, septembre 1992
- ⁵ Didier Cassereau, et Mathias Fink, « Time Reversal of ultrasonics fields-Part III : Basic Principles », IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Control, vol 39, pp 579-592, septembre 1992
- ⁶ Philippe Roux, « Application des miroirs acoustiques à retournement temporel dans un guide d'onde et à la caractérisation d'écoulements hydrodynamiques », Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1997.
- ⁷ Arnaud Derode, « La cohérence des ondes ultrasonores en milieu hétérogène », Thèse de doctorat, Université Paris VII, decembre 1994.
- ⁸ Mickael Tanter, « Application du retournement temporel à l'hyperthermie ultrasonore du cerveau », Thèse de doctorat, Université Paris VII, 1999.
- ⁹ Arnaud Derode, Philippe Roux et Mathias Fink, « Robust acoustic time-reversal of with high order multiple scattering », Phys. Rev. Lett. **75**, 4206 (1995).
- ¹⁰ D. M. Pepper, Opt. Eng. **21**, 156 (1982).
- ¹¹ Carsten Draeger and Mathias Fink, « One-Channel Time Reversal of Elastic Waves in a Chaotic 2D-Silicon Cavity », Phys. Rev. Lett. **79**, 407.
- ¹² Roel Snieder and J. A. Scales, « Time reversed imaging as a diagnostic of wave and particle chaos », Phys. Rev. E. **58**, 5668 (1998).
- ¹³ Arnaud Tourin, Arnaud Derode and Mathias Fink, « Dynamic Time reversal of randomly backscattered acoustic waves », Europhys. Lett., **47** (2), 175 (1999).
- ¹⁴ Arnaud Derode, Arnaud Tourin and Mathias Fink « Ultrasonic pulse compression with one-bit time reversal through multiple scattering », Journal of Applied Physics **85**, 6343 (1999).
- ¹⁵ C.S. Clay and H. Medwin, « Acoustical Oceanography », Wiley-Interscience, New York 1977.