

1ère année

Ondes Electromagnétiques

Notes de cours

**Rémi CARMINATI
Cheryl FEUILLET-PALMA**

2021-2022

Table des matières

1 Ondes électromagnétiques dans le vide	9
1.1 Introduction	9
1.2 Equations de Maxwell microscopiques	11
1.3 Ondes électromagnétiques	12
1.3.1 Equations de Maxwell dans le vide	12
1.3.2 Equation d'onde	12
1.3.3 Equation de Helmholtz	13
1.4 Solutions canoniques de l'équation d'onde	13
1.4.1 Ondes planes	13
1.4.2 Ondes sphériques	14
1.4.3 Polarisation des ondes planes monochromatiques	14
1.5 Conservation de l'énergie. Vecteur de Poynting	16
2 Electrodynamique des milieux continus	17
2.1 Equations de Maxwell macroscopiques	17
2.1.1 Champs microscopiques	17
2.1.2 Moyenne spatiale	18
2.1.3 Equations de Maxwell moyennées	19
2.2 Relations de continuité à une interface	24
2.3 Relations constitutives	26
2.3.1 Régime statique	26
2.3.2 Régime dynamique. Dispersion	26
2.3.3 Constante diélectrique	27
2.3.4 Relations de Kramers-Kronig	28

2.4	Propagation d'ondes dans les milieux linéaires, homogènes et isotropes	29
2.4.1	Equation de Helmholtz	30
2.4.2	Indice de réfraction complexe	30
2.4.3	Milieux non dispersifs	31
2.5	Aspects énergétiques	31
2.5.1	Puissance absorbée	31
2.5.2	Théorème de Poynting	32
2.5.3	Bilan d'énergie en régime monochromatique	33
3	Propriétés électromagnétiques des matériaux	35
3.1	Un exemple : mécanismes d'absorption dans l'eau liquide	35
3.2	Polarisation d'orientation et relaxation diélectrique	37
3.2.1	Modèle de Debye	37
3.2.2	Modèle de Cole-Cole	38
3.3	Métaux	38
3.3.1	Contribution des électrons libres. Modèle de Drude	38
3.3.2	Transitions inter-bandes	39
3.4	Modèle de l'électron élastiquement lié	40
3.5	Cristaux polaires	41
3.6	Semiconducteurs	42
4	Ondes électromagnétiques aux interfaces	45
4.1	Lois de Snell-Descartes	45
4.1.1	Principe général	45
4.1.2	Lois de la réflexion	46
4.1.3	Lois de la transmission	46
4.2	Facteurs de Fresnel en amplitude	47
4.2.1	Relations de continuité des champs	47
4.2.2	Calcul des facteurs de Fresnel en polarisation TE	48
4.2.3	Cas de la polarisation TM	49
4.3	Conservation de l'énergie à une interface	50
4.3.1	Facteurs de Fresnel en énergie	50
4.3.2	Relation de conservation de l'énergie	50

4.4	Discussion. Cas particuliers	51
4.4.1	Incidence normale	51
4.4.2	Dépendance angulaire des facteurs de réflexion	51
4.4.3	Absorption par un corps opaque	52
4.4.4	Réflexion totale interne	52
5	Lignes de transmission et adaptation d'impédance	55
5.1	Approximation quasi-statique et théorie des circuits	55
5.1.1	Régime quasi-statique	56
5.1.2	Connexions entre circuits	57
5.2	Modélisation d'une ligne de transmission	58
5.2.1	Domaine temporel : équation des télégraphistes	58
5.2.2	Régime harmonique	59
5.3	Réflexion et adaptation d'impédance	61
5.3.1	Facteur de réflexion en bout de ligne	61
5.3.2	Facteur de réflexion local et impédance ramenée	62
5.3.3	Changement de variable	62
5.3.4	Représentation graphique de $\Gamma(s)$	63
6	Ondes guidées	65
6.1	Introduction	65
6.2	Guide métallique à plaques parallèles	66
6.3	Méthode générale pour les guides métalliques	68
6.3.1	Décomposition des champs	69
6.3.2	Modes transverses électriques	71
6.3.3	Dispersion et fréquence de coupure	71
6.4	Guide d'onde diélectrique plan	72
6.4.1	Hypothèses de travail	73
6.4.2	Modes guidés	74
6.4.3	Résolution graphique	75
6.4.4	Discussion	76
6.5	Propagation et atténuation de l'énergie	76
6.5.1	Vitesse de transport	76

6.5.2	Atténuation	78
7	Cavités résonantes	79
7.1	Cavité métallique rectangulaire	79
7.2	Energie stockée et facteur de qualité	80
8	Rayonnement électromagnétique	83
8.1	Formulation générale d'un problème de rayonnement	83
8.1.1	Potentiels	83
8.1.2	Choix de jauge	84
8.1.3	Equations de propagation des potentiels	84
8.2	Potentiels retardés	85
8.2.1	Fonction de Green	85
8.2.2	Expressions des potentiels	86
8.2.3	Potentiel vecteur en régime monochromatique	86
8.3	Approximation de champ lointain	87
8.3.1	Potentiel vecteur	87
8.3.2	Champ magnétique	88
8.3.3	Champ électrique	88
8.3.4	Puissance rayonnée	89
8.4	Approximation dipolaire électrique	90
8.4.1	Potentiel et champ dipolaire électrique	90
8.4.2	Puissance rayonnée en champ lointain	91
9	Antennes	93
9.1	Analyse qualitative du rayonnement en champ lointain	93
9.2	Caractérisation des antennes	94
9.2.1	Directivité et gain	94
9.2.2	Rendement	95
9.2.3	Surface effective	96
9.3	Réciprocité et conséquences	97
9.3.1	Théorème de réciprocité	97
9.3.2	Relation entre gain et surface effective	99

9.3.3	Formule de Friis	100
9.4	Réseaux d'antennes	101
9.4.1	Interférences et directivité	101
9.4.2	Contrôle de la directivité	103

Chapitre 1

Ondes électromagnétiques dans le vide

Objectifs

- Introduire les équations de Maxwell microscopiques.
- Rappeler les propriétés des ondes électromagnétiques dans le vide.
- Définir les états de polarisation des ondes planes.

1.1 Introduction

L'électromagnétisme est l'étude des champs électriques et magnétiques en présence de distributions de charges et de courants. L'étude des champs électriques produits par des distributions de charge indépendantes du temps est le domaine de l'électrostatique, tandis que l'étude des champs magnétiques produits par des distributions de courant indépendantes du temps est le domaine de la magnéto-statique. Dans ce cours nous nous intéressons au domaine de l'électrodynamique, dans lequel les distributions de charges et les courants dépendent du temps. L'accélération des charges donne lieu à la génération d'ondes électromagnétiques, dont l'étude est l'objet principal de ce cours.

En électrodynamique, le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et le champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ dépendent dans le cas le plus général de la position $\mathbf{r} = (x, y, z)$ et du temps. On a souvent recours à une représentation fréquentielle, utilisant la transformation de Fourier. Le champ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ s'écrit alors comme une superposition linéaire de champs qui oscillent à des fréquences bien déterminées :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (1.1)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t) dt \quad (1.2)$$

la transformée de Fourier temporelle du champ. Puisque le champ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ est réel, sa transformée de Fourier doit vérifier $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, -\omega)$, où $*$ désigne le complexe conjugué. On a donc toute l'information si l'on se restreint à la connaissance de $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ pour les fréquences positives.

Notons au passage les conventions pour les transformées de Fourier qui seront utilisées dans ce cours. La convention pour la dépendance temporelle en $\exp(-i\omega t)$ est la convention habituelle en physique des ondes (on utilise souvent la convention de signe opposée en électronique). Bien que nous choissions une représentation en pulsation ω plutôt qu'en fréquence $\nu = \omega/(2\pi)$, par abus de langage nous utiliserons l'appellation "fréquence" pour ω (il faudra simplement prendre garde au facteur 2π éventuel dans les applications numériques).

Champ monochromatique

Un cas particulier important est celui d'un champ monochromatique, qui ne contient qu'une seule fréquence ω_0 , et dont le spectre est de la forme

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \pi \mathbf{E}(\mathbf{r}) \delta(\omega - \omega_0) + \pi \mathbf{E}(\mathbf{r})^* \delta(\omega + \omega_0). \quad (1.3)$$

Ici $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ est l'amplitude complexe du champ, qui décrit sa dépendance spatiale. En insérant cette expression dans (1.1), on obtient

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_0 t)] \quad (1.4)$$

qui est l'expression générale d'un champ monochromatique. En introduisant le module et la phase de l'amplitude complexe $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = |\mathbf{E}(\mathbf{r})| \exp(-i\phi)$, on peut aussi écrire

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = |\mathbf{E}(\mathbf{r})| \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (1.5)$$

qui est une autre expression d'un champ monochromatique.

Spectre des ondes électromagnétiques

Le spectre des ondes électromagnétiques est représenté sur la Fig. 1.1, en fréquence $\nu = \omega/(2\pi)$ et en longueur d'onde $\lambda = c/\nu = 2\pi c/\omega$, c étant la vitesse de la lumière dans le vide.

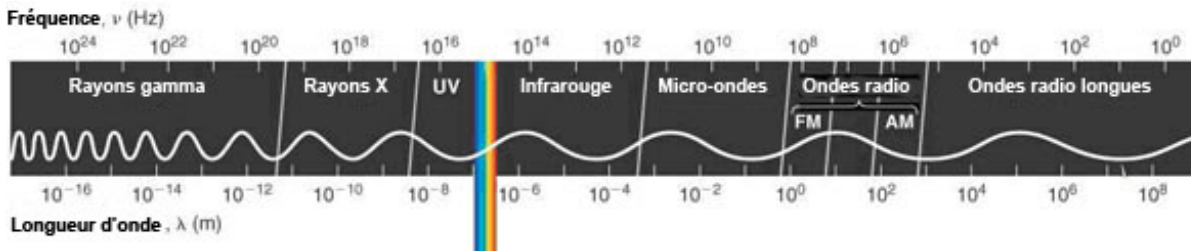


Figure 1.1: Spectre des ondes électromagnétiques.

Remarque sur les unités spectrales

Selon les communautés scientifiques, le spectre électromagnétique est repéré en pulsation ω

(rad.s⁻¹ ou Hz), en fréquence ν (Hz), en longueur d'onde λ (m), en nombre d'onde $\sigma = 1/\lambda$ (cm⁻¹, unité souvent utilisée en spectroscopie), ou encore en énergie E (souvent exprimée en eV en physique). Pour passer d'une unité à l'autre on utilise les relations $\omega/c = 2\pi\nu/c = 2\pi/\lambda$ et $E = h\nu = \hbar\omega$ avec h la constante de Planck et $\hbar = h/2\pi$.

1.2 Equations de Maxwell microscopiques

Dans une approche microscopique de l'électrodynamique, la matière est constituée d'électrons, de protons et de neutrons considérés comme des particules ponctuelles placées dans le vide. Les densités de charge et de courant microscopiques sont donc dues à des charges ponctuelles (électrons et protons) dispersées dans le vide. La densité de charge microscopique s'écrit

$$\rho_m(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)], \quad (1.6)$$

où $\mathbf{r}_i(t)$ est la position de la charge q_i à l'instant t et $\delta(\dots)$ est la distribution de Dirac. De même, la densité de courant s'écrit

$$\mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)], \quad (1.7)$$

où $\mathbf{v}_i(t)$ est la vitesse de la charge q_i . Les équations de Maxwell microscopiques relient les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} à ces termes sources :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\rho_m(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} & \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (1.8)$$

où ϵ_0 et μ_0 sont la permittivité et la perméabilité du vide, respectivement. A ces quatre équations, il faut ajouter l'expression de la force de Lorentz

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E} + q \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}, \quad (1.9)$$

qui est la force exercée par les champs électromagnétiques sur une charge ponctuelle q . Notons que nous avons là cinq des sept équations fondamentales de la physique classique (il faut ajouter le principe fondamental de la dynamique et l'expression de la force gravitationnelle).

Il est intéressant de noter que les équations de Maxwell impliquent la conservation de la charge. En effet, en prenant la divergence de l'équation donnant $\operatorname{rot} \mathbf{B}$, et en utilisant l'équation donnant $\operatorname{div} \mathbf{E}$, on obtient directement

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho_m}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.10)$$

qui est une équation de continuité décrivant la conservation de la charge.

En régime monochromatique, on utilise la notation complexe [Eq. (1.4)] pour les champs et pour les termes sources. Les équations de Maxwell s'écrivent alors directement pour les amplitudes complexes sous la forme

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{\rho_m(\mathbf{r})}{\epsilon_0} & \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mu_0 \mathbf{j}_m(\mathbf{r}) - i\omega \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Les équations de Maxwell microscopiques ne sont utilisables en pratique que lorsque l'on cherche à évaluer les champs à l'extérieur de la zone contenant les sources. Pour décrire les champs dans un milieu matériel, il est illusoire (et inutile) de chercher à utiliser directement ces équations microscopiques pour décrire la propagation des ondes à l'échelle macroscopique. Nous verrons au chapitre suivant comment ce problème est résolu par l'introduction des équations de Maxwell macroscopiques et des relations constitutives qui décrivent la réponse de la matière à l'échelle du milieu continu.

1.3 Ondes électromagnétiques

1.3.1 Equations de Maxwell dans le vide

Dans le vide, les densités de charges et de courants sont nulles. Les équations de Maxwell se simplifient donc sous la forme

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

On remarque que les champs électromagnétiques dans le vide vérifient $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ et $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Les champs à divergence nulle sont dits *transverses*.

1.3.2 Equation d'onde

A partir des équations de Maxwell dans le vide, on établit

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{rot} \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial(\operatorname{rot} \mathbf{B})}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (1.13)$$

On a également

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E} \quad (1.14)$$

car $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ dans le vide. On en déduit que le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ obéit à l'équation d'onde (ou équation de d'Alembert)

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.15)$$

avec $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ la vitesse de la lumière dans le vide. Le champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ vérifie également l'équation d'onde

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.16)$$

Les équations de Maxwell prédisent donc l'existence d'ondes électromagnétiques se propageant dans le vide. Ces ondes ont été découvertes par Hertz en 1888, après la mort de Maxwell (1831-1879) qui n'aura donc pas eu de preuve de l'existence de ces ondes de son vivant.

1.3.3 Equation de Helmholtz

En régime monochromatique, on a $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]$ et à partir de l'Eq. (1.15) on montre directement que l'amplitude complexe du champ vérifie l'équation de Helmholtz :

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.17)$$

L'intérêt de cette équation, qui dans le vide apparaît comme une conséquence triviale de l'équation d'onde, deviendra évident lors de l'étude de la propagation dans les milieux matériels en présence de dispersion.

1.4 Solutions canoniques de l'équation d'onde

Dans cette section, on se contente de rappels sans démonstration.

1.4.1 Ondes planes

Choisissons un axe (Oz) arbitraire, et cherchons une solution de l'équation d'onde qui ne dépende que de z et de t . L'équation d'onde impose que la solution soit de la forme

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}^+(z - ct) + \mathbf{E}^-(z + ct) \quad (1.18)$$

où $\mathbf{E}^+(z - ct)$ représente une onde plane progressive se propageant dans la direction (Oz) vers les z positifs. L'onde $\mathbf{E}^-(z + ct)$ se propage vers les z négatifs.

Un cas particulier important est celui des ondes monochromatiques, dont la dépendance temporelle est de la forme $\cos(\omega t)$. En réécrivant la forme générale de l'onde plane progressive se propageant vers les z positifs sous la forme $\mathbf{E}^+(t - z/c)$, on a

$$\mathbf{E}^+(t - z/c) = \text{Re} \{ \mathbf{E}^+ \exp[-i\omega(t - z/c)] \} = \text{Re} [\mathbf{E}^+ \exp(ikz - i\omega t)] \quad (1.19)$$

avec $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$.

On retiendra que l'expression générale d'une onde plane monochromatique se propageant vers les z positifs est

$$\mathbf{E}(z, t) = \text{Re} [\mathbf{E}_0 \exp(ikz - i\omega t)] \quad (1.20)$$

où \mathbf{E}_0 est une amplitude constante (et en général complexe). Une onde plane se propageant dans une direction arbitraire définie par le vecteur unitaire \mathbf{u} est de la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)] \quad (1.21)$$

où $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$ est le vecteur d'onde. En imposant à cette onde de vérifier l'équation de Helmholtz (1.17), on obtient de nouveau $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$.

1.4.2 Ondes sphériques

Une autre solution canonique de l'équation d'onde est l'onde sphérique, qui ne dépend que de $r = |\mathbf{r}|$ et t . L'équation d'onde impose une solution de la forme

$$\mathbf{E}(r, t) = \frac{1}{r} \mathbf{E}^+(t - r/c) + \frac{1}{r} \mathbf{E}^-(t + r/c). \quad (1.22)$$

Le premier terme correspond à une onde sphérique divergente, et le second à une onde sphérique convergente.

En régime monochromatique, une onde sphérique divergente se propageant dans le vide est de la forme

$$\mathbf{E}(r, t) = \text{Re} \left[\mathbf{E}_0 \frac{\exp(ikr - i\omega t)}{r} \right]. \quad (1.23)$$

1.4.3 Polarisation des ondes planes monochromatiques

Si l'on note \mathbf{k} le vecteur d'onde, on peut réécrire les équations de Maxwell dans le vide pour des ondes planes monochromatiques sous la forme

$$\begin{aligned} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0 & i\mathbf{k} \wedge \mathbf{E} &= i\omega \mathbf{B} \\ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0 & i\mathbf{k} \wedge \mathbf{B} &= -i\omega \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

En effet, dans ce cas l'opérateur divergence devient un produit scalaire par \mathbf{k} , et l'opérateur rotationnel devient un produit vectoriel par \mathbf{k} . De cette écriture, on déduit directement les propriétés des ondes planes monochromatiques dans le vide :

- Les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont transverses (normaux à \mathbf{k}) et perpendiculaires entre eux ;
- $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{k})$ forment un trièdre direct ;
- Les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} subissent le même déphasage.

Pour une onde plane progressive se propageant dans le sens des z positifs, la forme la plus générale de l'onde est alors :

$$\begin{aligned} E_x &= E_x^0 \exp[i(kz + \phi_x)] \\ E_y &= E_y^0 \exp[i(kz + \phi_y)] \\ E_z &= 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Lorsque l'onde est émise par une source naturelle (par exemple une source incandescente, ou le Soleil), les déphasages ϕ_x et ϕ_y fluctuent rapidement dans le temps (avec un temps caractéristique comparable au temps d'émission spontanée des atomes constituant la source). A des temps d'observation plus grands que ce temps caractéristique, il n'y a pas de relation stable entre ϕ_x et ϕ_y (au sens statistique il n'y a pas de corrélation) : le rayonnement est dit non polarisé. On peut considérer l'onde comme la superposition de deux vibrations orthogonales ayant des fluctuations statistiquement indépendantes. C'est le cas de nombreuses sources de lumière naturelle.

Dans d'autres cas, la différence de phase $\phi = \phi_x - \phi_y$ est fixée et stable dans le temps. Le rayonnement est dit polarisé. C'est ce qui se produit par exemple lorsque le rayonnement est émis par un courant bien déterminé dans une antenne. On distingue alors différents états de polarisation de l'onde :

- Polarisation rectiligne : $\phi = p\pi$ avec p entier. Dans ce cas \mathbf{E} reste parallèle à une direction fixe au cours de la propagation.
- Polarisation circulaire : $\phi = \pm\pi/2 + 2p\pi$ et $E_x^0 = E_y^0$. L'extrémité du vecteur \mathbf{E} décrit un cercle dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. On parle de vibration circulaire gauche pour $\phi = +\pi/2$, de vibration circulaire droite pour $\phi = -\pi/2$. Un observateur recevant l'onde qualifera de circulaire gauche une vibration tournant dans le sens trigonométrique.
- Polarisation elliptique : $\phi = cte$. L'extrémité du vecteur \mathbf{E} décrit une ellipse dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. C'est la forme la plus générale d'un champ polarisé.

Remarque : Il est parfois utile d'écrire une onde monochromatique polarisée elliptiquement comme la superposition d'une onde polarisée circulaire gauche et d'une onde polarisée circulaire droite. Cela est toujours possible. Une onde circulaire droite se propageant dans la direction (Oz) peut s'écrire, en notant \mathbf{u}_x et \mathbf{u}_y les vecteurs unitaires des axes (Ox) et (Oy) :

$$\mathbf{E}_d = E [\cos(\omega t)\mathbf{u}_x - \sin(\omega t)\mathbf{u}_y] = E \operatorname{Re}[(\mathbf{u}_x - i\mathbf{u}_y) \exp(-i\omega t)] \quad (1.26)$$

où E est une amplitude réelle. De même, une onde circulaire gauche s'écrit :

$$\mathbf{E}_g = E [\cos(\omega t)\mathbf{u}_x + \sin(\omega t)\mathbf{u}_y] = E \operatorname{Re}[(\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y) \exp(-i\omega t)]. \quad (1.27)$$

En introduisant les vecteurs unitaires définissant les polarisations droite et gauche

$$\mathbf{e}_d = \frac{\mathbf{u}_x - i\mathbf{u}_y}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{e}_g = \frac{\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y}{\sqrt{2}}, \quad (1.28)$$

on peut écrire tout champ \mathbf{E} d'une onde polarisée elliptiquement indifféremment sous la forme $\mathbf{E} = E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y$ ou sous la forme $\mathbf{E} = E_d \mathbf{e}_d + E_g \mathbf{e}_g$. En effet :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y \\ &= \frac{E_x + iE_y}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_d + \frac{E_x - iE_y}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_g \\ &= E_d \mathbf{e}_d + E_g \mathbf{e}_g. \end{aligned}$$

Cette dernière décomposition est utile lorsqu'on étudie l'interaction d'une onde polarisée avec un milieu dont la réponse peut varier entre un état circulaire droit et un état circulaire gauche (c'est le cas de certains milieux anisotropes).

1.5 Conservation de l'énergie. Vecteur de Poynting

Le bilan d'énergie électromagnétique est connu sous le nom de théorème de Poynting. Nous l'établissons ici dans le cas particulier de la propagation dans le vide. Ceci permet d'identifier le vecteur de Poynting comme la grandeur caractérisant le flux d'énergie électromagnétique traversant une surface.

En prenant le produit scalaire de l'équation de Maxwell donnant $\mathbf{rot} \mathbf{B}$ par le champ électrique, on obtient

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.29)$$

On omet la dépendance des champs en \mathbf{r} et t pour alléger les notations, mais tous les champs sont considérés en domaine temporel. En utilisant l'identité vectorielle $\operatorname{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{B}$, et l'équation de Maxwell $\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, l'égalité se transforme en

$$\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \operatorname{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}). \quad (1.30)$$

En identifiant, comme on le fait en régime statique, la quantité $\epsilon_0 \mathbf{E}^2 / 2$ à la densité d'énergie électrique, et $\mathbf{B}^2 / (2\mu_0)$ à la densité d'énergie magnétique, on définit la densité d'énergie du champ dans le vide comme $u(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) / 2 + \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) / (2\mu_0)$. L'équation (1.30) prend alors la forme d'une équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{\Pi} = 0, \quad (1.31)$$

où $\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} / \mu_0$ est le vecteur de Poynting. Cette équation locale peut s'intégrer sur un volume fermé V quelconque entouré d'une surface S . En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski pour transformer l'intégrale de volume de $\operatorname{div} \mathbf{\Pi}$ en intégrale de surface, on obtient

$$\frac{dU}{dt} + \int_S \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}_{\text{ext}} d^2r = 0, \quad (1.32)$$

où $U = \int_V u dV$ est l'énergie contenue dans le volume V à l'instant t , et \mathbf{n}_{ext} est la normale sortante sur S . Le flux du vecteur de Poynting permet donc de calculer le flux d'énergie électromagnétique à travers une surface.

Références

- [1] J.D. Jackson, *Electrodynamique Classique* (Dunod, Paris, 2001), chapitres 6 et 7.
- [2] A. Zangwill, *Modern Electrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013)

Chapitre 2

Electrodynamique des milieux continus

Objectifs

- Introduire les équations de Maxwell macroscopiques et les relations constitutives.
- Poser les bases de la propagation d'ondes électromagnétiques dans les milieux linéaires, homogènes et isotropes.
- Discuter les phénomènes de dispersion, d'atténuation et d'absorption.

2.1 Equations de Maxwell macroscopiques

2.1.1 Champs microscopiques

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, les équations de Maxwell microscopiques relient les champs électrique et magnétique aux termes sources microscopiques :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t) &= \frac{\rho_m(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} & \operatorname{rot} \mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \\ \operatorname{div} \mathbf{B}_m(\mathbf{r}, t) &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{B}_m(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}_m}{\partial t}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Les champs microscopiques sont notés $\mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}_m(\mathbf{r}, t)$ dans ce chapitre afin de les distinguer des champs macroscopiques que nous allons introduire dans la suite. Les termes sources (densités volumiques de charge et de courant) s'écrivent

$$\begin{aligned} \rho_m(\mathbf{r}, t) &= \sum_i q_i \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] \\ \mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) &= \sum_i q_i \mathbf{v}_i(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] \end{aligned}$$

où $\mathbf{r}_i(t)$ et $\mathbf{v}_i(t)$ désignent la position et la vitesse de la charge q_i à l'instant t .

Dans la matière condensée, les champs décrits par ces équations présentent des variations d'amplitude très importantes aux échelles spatiales atomiques ou moléculaires ($10^{-9} - 10^{-10}$ m). Manipuler de tels champs s'avère impossible, et surtout inutile en pratique lorsqu'on s'intéresse aux échelles spatiales macroscopiques. Afin de n'avoir à manipuler que des champs présentant des variations spatiales grandes devant les échelles atomiques, on effectue une moyenne spatiale permettant d'obtenir les équations de Maxwell dites *macroscopiques*. Ces équations décrivent les champs à l'échelle du milieu continu. Notons que la prise de moyenne permet également de régulariser les champs mathématiquement (le champ microscopique présente de nombreuses singularités dues aux charges ponctuelles).

2.1.2 Moyenne spatiale

Historiquement, ce sont les équations macroscopiques qui ont été introduites par J.C. Maxwell. C'est H.A. Lorentz qui, avec la théorie de l'électron, a donné une vision microscopique de l'interaction entre rayonnement électromagnétique et matière. Il a introduit la notion de moyenne spatiale pour faire le lien entre les équations macroscopiques de Maxwell et l'approche microscopique.

Pour simplifier, nous raisonnons à une dimension d'espace. La moyenne spatiale d'une grandeur $F(x, t)$ est définie par

$$\langle F(x, t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x - x') F(x', t) dx' \quad (2.2)$$

où la fonction w possède les propriétés suivantes :

- w est réelle et positive.
- w a une extension spatiale de taille caractéristique L (elle est non négligeable uniquement dans une région de l'espace de taille L). La longueur L définit la dimension d'un élément de volume grand à l'échelle atomique, et petit à l'échelle macroscopique (qui définit un point à l'échelle du milieu continu). Dans le cas des ondes électromagnétiques, on doit vérifier $10^{-10} \text{ m} \ll L \ll \lambda$.
- w est normalisée : $\int_{-\infty}^{+\infty} w(x) dx = 1$.
- w est régulière (dérivable).

Un exemple de fonction satisfaisant à ces critères est $w(x) = (\sqrt{\pi}L)^{-1} \exp(-x^2/L^2)$.

Afin de moyenniser spatialement les équations de Maxwell microscopiques (et d'obtenir ainsi les équations macroscopiques), il est nécessaire de moyenniser des dérivées. Nous allons voir que les moyennes des dérivées sont simplement les dérivées des moyennes.

Pour la dérivation temporelle, on obtient immédiatement :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} F(x, t) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle F(x, t) \rangle. \quad (2.3)$$

Pour la dérivation spatiale, on a également :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x} \langle F(x, t) \rangle. \quad (2.4)$$

Ce résultat se démontre grâce à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \langle F(x, t) \rangle &= \frac{\partial}{\partial x} \int w(x - x') F(x', t) dx' \\ &= \int \frac{\partial w}{\partial x} (x - x') F(x', t) dx' \\ &= - \int \frac{\partial w}{\partial x'} (x - x') F(x', t) dx' \\ &= -[w F] + \int w(x - x') \frac{\partial F}{\partial x'}(x', t) dx' \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right\rangle, \end{aligned}$$

le premier terme de l'avant dernière ligne étant nul car w s'annule à l'infini et la fonction F est bornée.

2.1.3 Equations de Maxwell moyennées

En notant $\mathbf{E} = \langle \mathbf{E}_m \rangle$ et $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B}_m \rangle$ les champs moyennés, dits aussi champs macroscopiques, la prise de moyenne des équations (2.1) conduit à

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\langle \rho_m \rangle}{\epsilon_0} & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \langle \mathbf{j}_m \rangle + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.5)$$

où les dépendances en \mathbf{r} et t sont omises pour simplifier. Il faut donc déterminer les termes sources macroscopiques $\langle \rho_m \rangle$ et $\langle \mathbf{j}_m \rangle$. Il est possible d'effectuer explicitement la moyenne spatiale (voir [1] et [2]). Une autre approche plus formelle consiste à déterminer les expressions des termes sources en raisonnant directement à l'échelle macroscopique (voir [3]). C'est cette deuxième approche que nous présentons ici.

Calcul de la densité de charge macroscopique

Pour un milieu macroscopiquement non chargé (qui est le cas usuel), la charge totale est nulle. En notant V le volume de matériau considéré, ceci se traduit par

$$\int_V \langle \rho_m \rangle d^3r = 0 \quad (2.6)$$

avec $\langle \rho_m \rangle = 0$ en dehors du volume V . Une fonction vérifiant cette propriété est de la forme

$$\langle \rho_m \rangle = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad (2.7)$$

avec \mathbf{P} un vecteur tel que $\mathbf{P} = 0$ en dehors du volume V ¹. En effet, en définissant Σ comme une surface tangente au volume V mais extérieure à celui-ci et de normale locale sortante \mathbf{n} (comme sur la Fig. 2.1), on vérifie facilement que

$$\int_V (-\operatorname{div} \mathbf{P}) d^3r = - \oint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} d^2r = 0 \quad (2.8)$$

la dernière intégrale étant nulle puisque $\mathbf{P} = 0$ à l'extérieur du matériau.

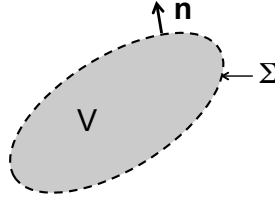


Figure 2.1: Volume et surface utilisés pour le calcul de la densité de charge macroscopique.

Afin de préciser la signification du vecteur \mathbf{P} , calculons le moment dipolaire électrique total du volume V , défini comme

$$\mathbf{p} = \int_V \langle \rho_m \rangle \mathbf{r} d^3r. \quad (2.9)$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= - \int_V (\operatorname{div} \mathbf{P}) \mathbf{r} d^3r \\ &= - \sum_{\alpha=x,y,z} \mathbf{e}_\alpha \int_V (\operatorname{div} \mathbf{P}) \alpha d^3r \\ &= - \sum_{\alpha=x,y,z} \mathbf{e}_\alpha \int_V [\operatorname{div}(\mathbf{P}\alpha) - \mathbf{P} \cdot \mathbf{grad}\alpha] d^3r \\ &= - \sum_{\alpha=x,y,z} \mathbf{e}_\alpha \left[\oint_{\Sigma} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}) \alpha d^2r - \int_V \mathbf{P} \cdot \mathbf{grad}\alpha d^3r \right] \\ &= - \oint_{\Sigma} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} d^2r + \int_V (\mathbf{P} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{r} d^3r \\ &= 0 + \int_V \mathbf{P} d^3r. \end{aligned}$$

La dernière égalité montre que \mathbf{P} est le moment dipolaire électrique par unité de volume dans le matériau. Sa dénomination habituelle est *densité de polarisation*. Ce résultat mérite quelques commentaires :

- La relation $\mathbf{p} = \int_V \mathbf{P} d^3r$ définit le vecteur \mathbf{P} complètement (l'introduction de \mathbf{P} via sa divergence fait qu'il était défini à un rotationnel près).

¹Le signe moins devant la divergence est conventionnel et permet de donner à \mathbf{P} un sens physique clair comme nous allons le voir plus loin.

- Physiquement, la densité de charge $-\text{div } \mathbf{P}$ traduit le fait que sous l'action du champ le nuage électronique des atomes se déforme, conduisant localement à une séparation spatiale entre les charges positives et négatives. Il y a donc localement apparition de moments dipolaires induits. Lorsque la densité de polarisation (nombre de moments dipolaires induits par unité de volume) n'est pas uniforme (plus précisément si sa divergence est non nulle), il apparaît macroscopiquement une densité de charge non nulle. On parle de *densité de charge de polarisation* ou de *densité de charges liées*.

Si le matériau contient une charge macroscopique autre que celle décrite par $-\text{div } \mathbf{P}$, il faut ajouter une densité de charge que nous appellerons "externe" et que nous noterons ρ_{ext} ². Dans le cas le plus général, la densité de charge macroscopique totale s'écrit

$$\langle \rho_m \rangle = \rho_{\text{ext}} - \text{div } \mathbf{P}. \quad (2.10)$$

On a donc obtenu l'une des équations de Maxwell macroscopiques avec terme source :

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{ext}} - \text{div } \mathbf{P}}{\epsilon_0}. \quad (2.11)$$

En définissant le vecteur *déplacement électrique* par

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.12)$$

l'équation de Maxwell ci-dessus peut se mettre sous la forme plus simple

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_{\text{ext}}. \quad (2.13)$$

On retiendra que ρ_{ext} décrit uniquement les charges dont la contribution n'est pas incluse dans le terme $-\text{div } \mathbf{P}$. Dans beaucoup de cas pratiques, $\rho_{\text{ext}} = 0$.³

Calcul de la densité de courant macroscopique

Le calcul précédent de la densité de charge macroscopique est valable aussi bien en électrostatique qu'en régime dynamique. En revanche, le calcul de la densité de courant macroscopique doit se faire en deux temps, en raisonnant d'abord sur le cas statique.

Régime statique

Intéressons-nous d'abord au cas d'un isolant, pour lequel en régime indépendant du temps le courant total dans le volume V du matériau est nul. Ceci signifie que

$$\int_S \langle \mathbf{j}_m \rangle \cdot \mathbf{n}_S \, d^2r = 0 \quad (2.14)$$

où S est n'importe quelle section complète du matériau de normale locale \mathbf{n}_S (voir Fig. 2.2).

²Une telle charge est par exemple un ion de substitution dans un matériau initialement neutre.

³Notons que les électrons libres d'un métal, dont la charge est compensée par les ions positifs du réseau cristallin, ne contribuent pas à ρ_{ext} . Ils peuvent être décrits par une densité de polarisation \mathbf{P} effective, comme nous le verrons un peu plus loin.

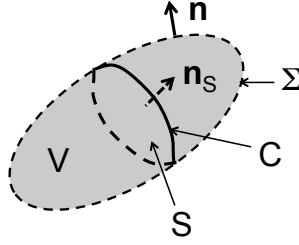


Figure 2.2: Volume, surface externe et section utilisés pour le calcul de la densité de courant macroscopique.

Une fonction vérifiant cette propriété est de la forme

$$\langle \mathbf{j}_m \rangle = \mathbf{rot} \mathbf{M}, \quad (2.15)$$

avec $\mathbf{M} = 0$ à l'extérieur du volume V . En effet, on a directement

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}_S d^2r = \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2.16)$$

où C est le contour défini comme l'intersection entre la section S et la surface extérieure Σ .

La signification physique du vecteur \mathbf{M} s'obtient en calculant le moment dipolaire magnétique total du volume V de matériau, défini comme

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \wedge \langle \mathbf{j}_m \rangle d^3r. \quad (2.17)$$

En utilisant des identités vectorielles connues (voir par exemple le formulaire de la Réf. [4]), on montre que

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{rot} \mathbf{M} = \mathbf{rot} (\mathbf{r} \wedge \mathbf{M}) - \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{M} + \mathbf{M} + \mathbf{grad}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}). \quad (2.18)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \wedge \mathbf{rot} \mathbf{M} d^3r \\ &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{rot} (\mathbf{r} \wedge \mathbf{M}) d^3r - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{M} d^3r + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{M} d^3r + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{grad}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}) d^3r. \end{aligned}$$

La première intégrale se transforme en $\int_\Sigma (\mathbf{r} \wedge \mathbf{M}) \wedge \mathbf{n} d^2r$ (identité non triviale mais connue, voir [4]) qui s'annule puisque $\mathbf{M} = 0$ sur Σ qui est tangente au volume V mais à l'extérieur de celui-ci. Le calcul de la deuxième intégrale est identique à celui effectué pour la densité de polarisation \mathbf{P} , et celle-ci est donc égale à $(1/2) \int_V \mathbf{M} d^3r$. Quant à la dernière intégrale elle se met sous la forme $\int_\Sigma (\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{n} d^2r$ (idem, voir [4]) qui s'annule. On a donc au final

$$\mathbf{m} = \int_V \mathbf{M} d^3r \quad (2.19)$$

qui montre que \mathbf{M} est le moment dipolaire magnétique par unité de volume, que l'on appelle habituellement *densité d'aimantation*. De même qu'une densité de polarisation non uniforme du matériau peut contribuer à la densité de charge macroscopique (si $\operatorname{div} \mathbf{P} \neq 0$), une aimantation non uniforme peut contribuer à la densité de courant (si $\mathbf{rot} \mathbf{M} \neq 0$).

Régime dépendant du temps

En régime dynamique, il n'y a pas d'équivalent à la contrainte $\int_S \langle \mathbf{j}_m \rangle \cdot \mathbf{n}_S d^2r = 0$ utilisée en régime statique. Il faut donc utiliser une autre méthode. Une manière de procéder est d'utiliser la relation de conservation de la charge.

A partir de l'Eq. (1.10), on obtient directement l'équation de conservation de la charge macroscopique :

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{j}_m \rangle + \frac{\partial \langle \rho_m \rangle}{\partial t} = 0. \quad (2.20)$$

En utilisant l'Eq. (2.10), on obtient

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{j}_m \rangle + \frac{\partial \rho_{\text{ext}}}{\partial t} - \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = 0. \quad (2.21)$$

Les charges externes peuvent éventuellement se déplacer, et contribuent en régime dynamique à une densité de courant \mathbf{j}_{ext} qui vérifie

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{ext}} + \frac{\partial \rho_{\text{ext}}}{\partial t} = 0. \quad (2.22)$$

Cette relation traduit la conservation des charges externes. On a donc

$$\operatorname{div} \left[\langle \mathbf{j}_m \rangle - \mathbf{j}_{\text{ext}} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right] = 0, \quad (2.23)$$

ce qui montre qu'il existe un vecteur \mathbf{M} tel que

$$\langle \mathbf{j}_m \rangle - \mathbf{j}_{\text{ext}} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad (2.24)$$

La signification du vecteur \mathbf{M} reste à préciser. En régime statique, et en l'absence de courants externes, la relation ci-dessus doit coïncider avec l'Eq. (2.15). Le vecteur \mathbf{M} s'identifie alors avec la densité d'aimantation. En régime dynamique basses fréquences, cette loi doit rester inchangée, car tant que les variations temporelles des champs électromagnétiques restent lentes par rapport aux temps caractéristiques microscopiques du matériau, les lois dynamiques doivent rester identiques à celles du cas statique. On conclut donc que \mathbf{M} s'identifie avec la densité d'aimantation en régime dynamique également.

Nous avons donc montré que la densité de courant macroscopique est

$$\langle \mathbf{j}_m \rangle = \mathbf{j}_{\text{ext}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad (2.25)$$

Le premier terme \mathbf{j}_{ext} est la densité de courant due aux charges externes (ce terme représente par exemple une source externe qui génère le champ incident sur le matériau étudié). Le deuxième terme est le courant de polarisation $\partial \mathbf{P} / \partial t$, créé par la déformation du nuage électronique des atomes en régime dynamique. Ce terme contient également l'effet des charges libres, qui n'est pas séparable de l'effet de la polarisation en régime dynamique (sauf à basse fréquence). Le troisième terme est le courant dû à l'aimantation \mathbf{M} . Dans les matériaux réels, ce terme n'existe qu'en régime statique ou à basse fréquence [3]. Il est cependant possible de produire des matériaux artificiels, ou métamatériaux, présentant du magnétisme dans le domaine infrarouge ou même

optique. La conception, la fabrication et l'étude des métamatériaux électromagnétiques est un domaine très actif à l'heure actuelle.

L'équation de Maxwell macroscopique donnant $\mathbf{rot} \mathbf{B}$ s'écrit

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \left[\mathbf{j}_{\text{ext}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{rot} \mathbf{M} \right] + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.26)$$

En définissant le champ macroscopique \mathbf{H} comme

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (2.27)$$

qui est habituellement appelé *champ magnétique* (le champ \mathbf{B} étant en toute rigueur appelé *induction magnétique*), l'équation de Maxwell ci-dessus peut se réécrire sous la forme

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{ext}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.28)$$

qui est la seconde équation de Maxwell macroscopique avec terme source.

En conclusion, dans un milieu matériel, les équations de Maxwell macroscopiques s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho_{\text{ext}} & \mathbf{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \mathbf{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}_{\text{ext}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

C'est cet ensemble d'équations qui a été initialement introduit par Maxwell⁴. Contrairement au cas microscopique, il faut noter que ce jeu d'équation n'est plus fermé (le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations). C'est le prix à payer lorsque l'on passe à une description macroscopique. Il est alors nécessaire d'utiliser des relations entre les inconnues (dites relations constitutives), moyennant l'introduction de paramètres décrivant la réponse macroscopique du milieu, comme nous allons le voir dans la suite.

2.2 Relations de continuité à une interface

Afin de déterminer les conditions aux limites à une interface séparant deux milieux homogènes, il est utile d'écrire le jeu d'équations sous forme intégrale. Pour cela, on raisonne sur la surface Σ (entourant le volume V) et sur le contour C (entourant la surface S) définis sur la Fig. 2.3. Le vecteur unitaire \mathbf{n} normal à la surface Σ est également normal à l'interface, et le vecteur unitaire \mathbf{t} (orientant le contour C) est supposé tangent à l'interface.

Le théorème de la divergence permet d'obtenir :

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d^2r = \int_V \rho_{\text{ext}} d^3r \quad \text{et} \quad \oint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d^2r = 0. \quad (2.30)$$

⁴Maxwell n'utilisait cependant pas le formalisme vectoriel. L'écriture des équations de Maxwell sous cette forme est due à Oliver Heaviside.

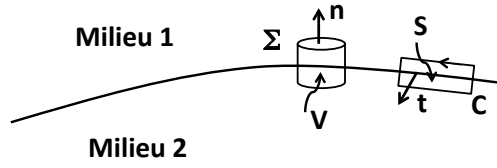


Figure 2.3: Interface séparant deux milieux homogènes, et géométrie utilisée pour démontrer les relations de continuité des champs à l'interface.

En raisonnant sur le cylindre de volume V de la Fig. 2.3, à la limite où sa hauteur tend vers zéro (sa base et son sommet de surfaces $\Delta\Sigma$ restant parallèles à l'interface), on obtient

$$(\mathbf{D}^{(1)} - \mathbf{D}^{(2)}) \cdot \mathbf{n} \Delta\Sigma = \sigma_s \Delta\Sigma \quad \text{et} \quad (\mathbf{B}^{(1)} - \mathbf{B}^{(2)}) \cdot \mathbf{n} \Delta\Sigma = 0. \quad (2.31)$$

Les exposants 1 et 2 font référence au champ total calculé dans les milieux 1 et 2, respectivement. La densité superficielle de charges σ_s n'existe que si la densité de charges libres ρ_{ext} est non nulle et singulière sur l'interface. Ceci ne se produit que dans le cas du modèle idéalisé du métal parfaitement conducteur (et dans ce cas l'un des deux termes $\mathbf{D}^{(1)}$ ou $\mathbf{D}^{(2)}$ est également nul puisque les champs sont nuls à l'intérieur d'un métal parfaitement conducteur). Dans les matériaux réels non chargés, on a toujours $\sigma_s = 0$.

De manière analogue, le théorème de Stokes permet d'obtenir une forme intégrale des deux autres équations de Maxwell :

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j}_{\text{ext}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{t} d^2r \quad \text{et} \quad \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{t} d^2r. \quad (2.32)$$

En raisonnant sur le rectangle de surface S de la Fig. 2.3, à la limite où ses petits côtés tendent vers zéro (ses grands côtés de longueur Δl restant parallèles à l'interface), on obtient

$$(\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)}) \Delta l = 0 \quad \text{et} \quad (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{H}^{(2)}) \Delta l = \mathbf{j}_s \cdot \mathbf{t} \Delta l. \quad (2.33)$$

La densité superficielle de courant \mathbf{j}_s n'existe que si la densité de courant totale est non nulle et singulière sur l'interface. Comme pour la densité de charge superficielle discutée précédemment, ceci ne se produit que dans le cas du modèle idéalisé du métal parfaitement conducteur. Dans les matériaux réels, on a toujours $\mathbf{j}_s = 0$.

En résumé, les relations de continuité des champs à une interface séparant deux milieux homogènes s'écrivent

$$\mathbf{E}_{\parallel}^{(1)} = \mathbf{E}_{\parallel}^{(2)}$$

$$\mathbf{H}_{\parallel}^{(1)} = \mathbf{H}_{\parallel}^{(2)}$$

$$\mathbf{D}_{\perp}^{(1)} = \mathbf{D}_{\perp}^{(2)}$$

$$\mathbf{B}_{\perp}^{(1)} = \mathbf{B}_{\perp}^{(2)}$$

La notation \parallel (\perp) désigne la composante tangentielle (normale) du champ par rapport à l'interface. Retenons également que la composante tangentielle de \mathbf{H} et la composante normale de \mathbf{D} sont toujours continues à une interface, sauf dans le cas très particulier du modèle de métal parfaitement conducteur. Dans ce cas, si le métal occupe le milieu 2, on a $\mathbf{H}^{(2)} = 0$, $\mathbf{D}^{(2)} = 0$ et $\mathbf{H}_{\parallel}^{(1)} = \mathbf{j}_s \times \mathbf{n}$ et $\mathbf{D}_{\perp}^{(1)} = \sigma_s \mathbf{n}$ à l'interface.

2.3 Relations constitutives

Nous nous limitons dans ce cours à la description des milieux linéaires (relations linéaires entre les termes sources macroscopiques et les champs) et isotropes (fonctions de réponse scalaires).

2.3.1 Régime statique

En régime statique, on distingue le comportement électrique des conducteurs (métaux) de celui des isolants (diélectriques). On décrit les conducteurs à l'aide de la conductivité σ , et la relation constitutive est la loi d'Ohm :

$$\mathbf{j}_{\text{libre}} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.34)$$

où $\mathbf{j}_{\text{libre}}$ est la densité de courant due aux charges libres qui sont les seules à assurer la conduction en régime statique. La conductivité statique d'un métal peut être obtenue par exemple en mesurant la résistance d'un fil de longueur et de section données.

On décrit les isolants à l'aide de la permittivité relative ϵ_s (dite aussi constante diélectrique), et la relation constitutive reliant le déplacement électrique ou la densité de polarisation au champ électrique qui règne à l'intérieur du matériau :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \epsilon_s \mathbf{E} \\ \mathbf{P} &= \epsilon_0 (\epsilon_s - 1) \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

La constante diélectrique statique d'un isolant peut se déduire de la mesure de capacité d'un condensateur plan dont l'espace entre les deux électrodes est occupé par le matériau étudié.

Les milieux magnétiques sont décrits par la perméabilité magnétique relative μ_s , qui relie le champ magnétique \mathbf{H} à l'induction magnétique \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_s \mathbf{H}. \quad (2.36)$$

2.3.2 Régime dynamique. Dispersion

En régime dynamique, les relations constitutives gardent une forme similaire. Cependant, l'inertie des charges mises en mouvement par le champ électromagnétique fait que la réponse s'établit avec un retard par rapport à l'excitation. Les milieux deviennent *dispersifs*. Dans le domaine fréquentiel, la dispersion se traduit par le fait que les fonctions de réponse dépendent de la fréquence. On a par exemple

$$\mathbf{D}(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \mathbf{E}(\omega). \quad (2.37)$$

Cette relation définit la constante diélectrique en régime dynamique.

La relation (2.37) est à comprendre comme une relation entre les transformées de Fourier des champs, ou entre des champs monochromatiques. Pour obtenir la relation en domaine temporel, on utilise la décomposition de Fourier⁵:

$$\mathbf{D}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{D}(\omega) \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (2.38)$$

La relation constitutive d'un milieu dispersif en domaine temporel, s'écrit alors sous la forme d'un produit de convolution :

$$\mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_r(t-t') \mathbf{E}(t') dt' \quad (2.39)$$

où $\epsilon_r(t)$ et $\epsilon_r(\omega)$ sont reliées par une relation de transformée de Fourier du type (2.38). On comprend alors l'intérêt de décrire la propagation dans un milieu dispersif en domaine fréquentiel.

En résumé, dans les milieux dispersifs, on décrit la réponse des matériaux dans le domaine fréquentiel, ou avec des champs monochromatiques. La dispersion se traduit alors par des fonctions de réponse qui dépendent de la fréquence. Pour des milieux linéaires, isotropes, et éventuellement hétérogènes, on a donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) &= \epsilon_0 \epsilon_r(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \\ \text{ou } \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) &= \epsilon_0 [\epsilon_r(\mathbf{r}, \omega) - 1] \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mu_r(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega).$$

Les deux premières relations, qui sont équivalentes, correspondent à la réponse diélectrique et décrivent aussi bien la polarisation du milieu que l'effet des charges libres. En particulier, le courant de "polarisation" $\mathbf{j} = -i\omega \mathbf{P} = -i\omega \epsilon_0 [\epsilon_r(\omega) - 1] \mathbf{E}$ contient à la fois la contribution des charges libres et celle des charges liées (ce point sera précisé dans la suite). La troisième relation correspond à la réponse des milieux magnétiques.

2.3.3 Constante diélectrique

La constante diélectrique $\epsilon_r(\omega)$ traduit la réponse du matériau au champ électrique. Son utilisation couvre aussi bien le cas des métaux que celui des diélectriques. Il faut bien noter qu'aux fréquences élevées (qui ne sont pas petites devant l'inverse du temps de réponse des électrons ou des vibrations moléculaires, comme dans le régime infrarouge ou optique pour lesquels $\omega \simeq 10^{14} - 10^{15}$ Hz), il n'est pas possible pour un matériau donné de séparer les contributions des charges libres et des charges de polarisation. Une telle séparation n'a de sens qu'en régime statique, ou en régime basse fréquence pour lequel la réponse des matériaux reste identique au cas statique.

⁵Nous n'utilisons pas de notations différentes pour la fonction et sa transformée de Fourier, et nous les distinguons sans ambiguïté par la variable dont elles dépendent.

Comportement à basse fréquence

Aux fréquences petites devant l'inverse des temps de réponse microscopiques du matériau, il redevient légitime de considérer séparément les contributions des charges libres (électrons libres dans les métaux, électrons de conduction dans un semiconducteur, ions dans un électrolyte par exemple) et de la polarisation. Dans un diélectrique (isolant), on a uniquement une polarisation macroscopique et à basse fréquence on doit avoir $\epsilon_r(\omega) = \epsilon_r(\omega = 0) \equiv \epsilon_s$ où ϵ_s est la constante diélectrique électrostatique. Dans un conducteur, on sait qu'en régime statique l'effet des charges libres se traduit par la loi d'Ohm $\mathbf{j}_{\text{libre}} = \sigma \mathbf{E}$ où σ est la conductivité statique. Dans le cas général, en régime monochromatique à basse fréquence, on peut donc écrire $\mathbf{j} = -i\omega \mathbf{P} = \sigma \mathbf{E} - i\omega \epsilon_0 [\epsilon_s - 1] \mathbf{E}$. Comme par ailleurs $\mathbf{P} = \epsilon_0 [\epsilon_r(\omega) - 1] \mathbf{E}$ par définition de la constante diélectrique, on obtient par identification

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_s + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} . \quad (2.41)$$

On retiendra bien que cette forme de la constante diélectrique n'est valable qu'à basse fréquence.

Constante diélectrique à très haute fréquence

Lorsque la fréquence augmente, elle finit par devenir très grande devant l'inverse de tous les temps caractéristiques microscopiques du matériau. Le matériau tend donc à devenir transparent, et $\epsilon_r(\omega) \rightarrow 1$. On peut chercher le comportement asymptotique de la constante diélectrique lorsque $\omega \rightarrow \infty$. Dans cette limite, la réponse du matériau doit être identique à celle d'un gaz d'électrons libres, donnée par le modèle de Drude que nous établirons au chapitre suivant. On doit donc avoir un comportement de la forme

$$\epsilon_r(\omega) \sim 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{lorsque } \omega \rightarrow \infty \quad (2.42)$$

où $\omega_p^2 = Ne^2/(m\epsilon_0)$ définit la fréquence plasma, N étant le nombre d'électrons par unité de volume et m la masse de l'électron.

2.3.4 Relations de Kramers-Kronig

On utilise parfois, plutôt que la constante diélectrique, la grandeur $\chi(\omega) = [\epsilon_r(\omega) - 1]$, appelée susceptibilité électrique du matériau. La susceptibilité relie la densité de polarisation \mathbf{P} au champ \mathbf{E} . En imposant à la susceptibilité $\chi(t)$ d'être une fonction causale (c'est-à-dire $\chi(t) = 0$ pour $t < 0$), on peut montrer que $\chi(\omega)$ obéit à des relations générales appelées relations de Kramers-Kronig, qui lient sa partie réelle $\chi'(\omega)$ à sa partie imaginaire $\chi''(\omega)$:

$$\begin{aligned} \chi'(\omega) &= \frac{1}{\pi} VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ \chi''(\omega) &= \frac{-1}{\pi} VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' . \end{aligned} \quad (2.43)$$

La notation VP désigne la valeur principale de l'intégrale. En termes de constante diélectrique, ces relations s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}\epsilon'_r(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi} VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon''_r(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ \epsilon''_r(\omega) &= \frac{-1}{\pi} VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon'_r(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'.\end{aligned}\quad (2.44)$$

Ces expressions tout à fait générales ont des conséquences importantes en pratique. En particulier, étant donné que la partie imaginaire $\epsilon''_r(\omega)$ décrit l'absorption dans le matériau (nous le verrons dans la suite du chapitre), elles impliquent que :

- Tout milieu absorbant ($\epsilon''_r \neq 0$) est nécessairement dispersif (et *vice versa*).
- Au voisinage d'une raie d'absorption, $\epsilon''_r(\omega)$ passe par un maximum à une fréquence ω_0 . La partie réelle $\epsilon'_r(\omega)$ passe successivement par un maximum puis par un minimum, comme représenté sur la Fig. 2.4.

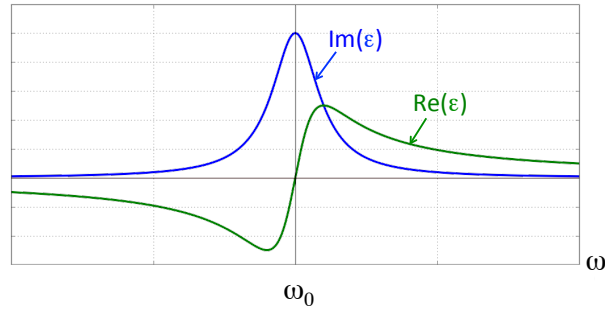


Figure 2.4: Allure générale des parties réelles et imaginaires de la constante diélectrique au voisinage d'un raie d'absorption.

- En principe, on peut déterminer la partie réelle de $\epsilon'_r(\omega)$ à partir de la mesure du spectre d'absorption qui donne accès à $\epsilon''_r(\omega)$.

Notons pour finir que l'indice optique, défini comme nous allons le voir par $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)}$ dans un milieu non magnétique, vérifie également les relations de Kramers-Kronig⁶. On a donc des relations analogues entre les parties réelle et imaginaire de l'indice complexe.

2.4 Propagation d'ondes dans les milieux linéaires, homogènes et isotropes

Dans cette section nous établissons les équations de propagation dans des milieux pour lesquels les fonctions de réponse sont scalaires (milieux isotropes) et indépendantes de la position (milieux homogènes).

⁶Cette propriété n'est pas évidente car l'indice de réfraction n'est pas une susceptibilité.

2.4.1 Equation de Helmholtz

Dans les milieux dispersifs, il est pratique de travailler en régime monochromatique. En travaillant avec les amplitudes complexes des champs, on a

$$\mathbf{rot rot E} = i\omega \mathbf{rot B} \quad (2.45)$$

et également

$$\mathbf{rot rot E} = \mathbf{grad}(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}. \quad (2.46)$$

En supposant le milieu non chargé ($\rho_{\text{ext}} = 0$) et homogène ($\epsilon_r(\omega)$ uniforme), on a $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. De plus, on peut relier $\mathbf{rot B}$ à \mathbf{E} par

$$i\omega \mathbf{rot B} = i\omega \mu_0 \mu_r(\omega) \mathbf{rot H} = i\omega \mu_0 \mu_r(\omega) [-i\omega \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \mathbf{E}]. \quad (2.47)$$

Finalement, en combinant les deux équations ci-dessus, on obtient l'équation de Helmholtz :

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (2.48)$$

Il est important de noter que cette équation prend en compte la dispersion dans le matériau dans toute sa généralité. Notons que du fait de la dépendance en ω de $\epsilon_r(\omega)$ et $\mu_r(\omega)$, il n'est pas possible d'obtenir une équation en domaine temporel similaire à (1.15) dans un milieu dispersif.

2.4.2 Indice de réfraction complexe

On définit l'indice de réfraction complexe $n(\omega)$ par la relation :

$$n(\omega) = [\epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega)]^{1/2}. \quad (2.49)$$

La racine carrée dans cette définition est celle d'un nombre complexe. Le choix à faire pour le signe de la racine carrée est celui qui donne une partie imaginaire de l'indice complexe positive. Pour un milieu passif (non amplificateur), et avec le choix de dépendance temporelle en $\exp(-i\omega t)$ qui est fait dans ce cours, c'est cette détermination qui correspond à une atténuation de l'onde au cours de sa propagation ⁷. Notons également que dans les milieux non magnétiques (cas rencontré fréquemment, pour lequel $\mu_r = 1$), on a plus simplement $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)}$. En utilisant l'indice de réfraction, l'équation de Helmholtz s'écrit

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (2.50)$$

Les parties réelle et imaginaire de l'indice ont des significations précises. Prenons l'exemple d'une onde plane monochromatique se propageant dans un milieu d'indice $n = n' + in''$, dans la direction de l'axe Oz . Son amplitude complexe est de la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}_0 \exp(in' \frac{\omega}{c} z - i\omega t) \exp(-n'' \frac{\omega}{c} z). \quad (2.51)$$

⁷Dans certains ouvrages, un choix de dépendance temporelle en $\exp(+i\omega t)$ est fait pour les champs monochromatiques. Dans ce cas, la partie imaginaire de l'indice complexe est négative dans les milieux passifs.

La première exponentielle est le terme de propagation, dans lequel la partie réelle de l'indice décrit la *vitesse de phase* :

$$v_\phi = \frac{c}{n'} . \quad (2.52)$$

La seconde exponentielle est un terme d'atténuation, ou d'*extinction* (la partie imaginaire de l'indice complexe est aussi appelée indice d'extinction). L'onde se propage en s'atténuant, avec une longueur caractéristique :

$$\delta = \frac{c}{\omega n''} = \frac{\lambda}{2\pi n''} \quad (2.53)$$

où λ est la longueur d'onde dans le vide. Dans un milieu homogène, l'atténuation est souvent due à l'absorption par le milieu. En effet, dans un milieu non magnétique, on a $n^2 = \epsilon_r$, et donc $2n'n'' = \epsilon_r''$. Comme nous le verrons ci-dessous, la partie imaginaire de la constante diélectrique ϵ_r'' décrit l'absorption par le milieu (transformation de l'énergie électromagnétique en chaleur).

Aux basses fréquences, la constante diélectrique est donnée par l'Eq. (2.41). Dans un métal, le second terme domine toujours, et on a donc $\epsilon_r(\omega) \sim i\sigma/(\omega\epsilon_0)$. L'indice est alors $n(\omega) = (1+i)\sqrt{\sigma/(2\omega\epsilon_0)}$, et la longueur d'atténuation de l'onde est donnée par

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma}} . \quad (2.54)$$

Cette longueur est l'épaisseur de peau d'un métal. Elle caractérise l'épaisseur de la couche sur laquelle le champ qui pénètre dans le métal s'atténue avant de s'annuler en profondeur.

2.4.3 Milieux non dispersifs

En régime basse fréquence, on peut négliger la dispersion et distinguer l'effet des charges liées et des charges libres en introduisant séparément une constante diélectrique statique et une conductivité. En utilisant la constante diélectrique donnée par l'Eq. (2.41) et $\mu_r(\omega) = \mu_s$, l'équation de Helmholtz (2.48) devient

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \epsilon_s \mu_s \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + i\omega \mu_0 \mu_s \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0 . \quad (2.55)$$

Il est alors possible de repasser en domaine temporel, puisque les constantes ϵ_s , μ_s et σ sont indépendantes de la fréquence. On obtient

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{\epsilon_s \mu_s}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \mu_s \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = 0 . \quad (2.56)$$

Cette équation est appelée équation des télégraphistes. Nous retrouverons une équation similaire dans l'étude des lignes de transmission.

2.5 Aspects énergétiques

2.5.1 Puissance absorbée

Lorsqu'une onde électromagnétique se propage dans un milieu matériel, un échange d'énergie irréversible peut se produire entre le rayonnement et la matière. Cette énergie est convertie en

chaleur, c'est le phénomène d'absorption. De manière instantanée, la puissance fournie par le champ à la matière, par unité de volume, est $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, où \mathbf{j} est le courant macroscopique total. Ce terme peut être compris comme un terme d'effet Joule généralisé.

Pour des champs oscillants, seule la valeur moyenne temporelle de l'énergie absorbée (sur un temps grand devant la période d'oscillation du champ) a un intérêt. La puissance volumique absorbée localement dans le milieu est donc

$$\mathcal{P}_{\text{abs}}(\mathbf{r}) = \overline{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)} \quad (2.57)$$

où $\overline{X(t)}$ représente la valeur moyenne temporelle de $X(t)$. Pour des champs monochromatiques de la forme $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{j}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]$ et $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]$, la puissance volumique absorbée en moyenne temporelle s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{abs}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})^*] \quad (2.58)$$

où $*$ désigne le complexe conjugué. Dans un milieu non magnétique on a

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -i\omega \mathbf{P}(\mathbf{r}) = -i\omega \epsilon_0 [\epsilon_r(\omega) - 1] \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.59)$$

et la puissance volumique absorbée localement au point \mathbf{r} (unité W.m^{-3}) s'écrit finalement

$$\mathcal{P}_{\text{abs}}(\mathbf{r}) = \frac{\omega \epsilon_0}{2} \epsilon_r''(\omega) |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2. \quad (2.60)$$

L'absorption dans le milieu est donc décrite par la partie imaginaire $\epsilon_r''(\omega)$ de la constante diélectrique. Ce terme contient les pertes dues aux charges libres (effet Joule habituel dans les métaux) et celles dues à la polarisation volumique (pertes diélectriques, dues par exemple aux collisions phonons-phonons et phonons-impuretés dans les cristaux, ou aux collisions entre molécules dans les gaz neutres). Dans un milieu magnétique, les pertes par absorption dues à l'aimantation seraient décrites par la partie imaginaire de la perméabilité relative $\mu_r(\omega)$.

2.5.2 Théorème de Poynting

Le bilan d'énergie électromagnétique sous sa forme la plus générale est connu sous le nom de théorème de Poynting. Nous avons établi ce théorème dans le cas de la propagation dans le vide au chapitre 1. Nous allons maintenant le généraliser au cas de champs dans un milieu matériel continu. En prenant le produit scalaire de l'équation de Maxwell donnant $\text{rot } \mathbf{H}$ par le champ électrique, on obtient

$$\mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (2.61)$$

En utilisant l'identité vectorielle $\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H}$, et l'équation de Maxwell $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, l'égalité se transforme en

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{j}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.62)$$

En notant $\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ le vecteur de Poynting instantané, l'équation s'écrit sous une forme très générale :

$$\text{div} \mathbf{\Pi} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{j}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.63)$$

Le membre de droite décrit l'échange d'énergie entre le champ et le courant dû aux charges externes (ce courant peut par exemple décrire une source externe qui fournit de l'énergie au champ). Les deuxième et troisième termes du membre de gauche ne peuvent pas s'interpréter directement comme une densité d'énergie, comme dans le cas du vide⁸. Il contiennent différentes contributions : densité d'énergie du champ, énergie potentielle stockée dans la matière, et pertes diélectriques (polarisation et charges libres) et magnétiques. La discussion (subtile) de ces différentes contributions en régime temporel sort du cadre de ce cours. Nous allons par contre expliciter le bilan d'énergie en moyenne temporelle dans le cas du régime monochromatique.

2.5.3 Bilan d'énergie en régime monochromatique

En régime monochromatique, nous allons considérer les valeurs moyennes temporelles des grandeurs énergétiques. Le produit scalaire de l'équation de Maxwell donnant $\mathbf{rot} \mathbf{H}$ par le complexe conjugué du champ électrique \mathbf{E}^* donne

$$\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{E}^* - i\omega \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^* . \quad (2.64)$$

Cette expression se transforme en

$$-i\omega \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^* + i\omega \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}^* = -\text{div}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) - \mathbf{j}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{E}^* . \quad (2.65)$$

L'équation en valeur moyenne temporelle s'obtient en prenant $1/2 \text{Re}[\dots]$ de chaque terme. En utilisant $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ (milieu non magnétique), on obtient

$$\text{div}\langle \mathbf{\Pi} \rangle = -\mathcal{P}_{\text{abs}} + \mathcal{P}_s \quad (2.66)$$

où \mathcal{P}_{abs} est la puissance volumique absorbée donnée par l'Eq. (2.60), $\langle \mathbf{\Pi} \rangle = 1/2 \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$ est la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting et $\mathcal{P}_s = -1/2 \text{Re}(\mathbf{j}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{E}^*)$ est un terme source de puissance volumique (puissance fournie par le courant externe \mathbf{j}_{ext} au champ électromagnétique).

L'intégration de cette équation locale sur un volume fermé V quelconque donne

$$\int_S \langle \mathbf{\Pi} \rangle \cdot \mathbf{n}_{\text{ext}} dS = -P_{\text{abs}} + P_s \quad (2.67)$$

où $P_s = \int_V \mathcal{P}_s dV$ est la puissance fournie par la source externe dans le volume V et $P_{\text{abs}} = \int_V \mathcal{P}_{\text{abs}} dV$ est la puissance absorbée dans le volume V . Cette puissance absorbée correspond à un transfert irréversible de l'énergie du champ en chaleur.

Références

- [1] G. Russakoff, "A derivation of the macroscopic Maxwell equations", Am. J. Phys. **38**, 1188 (1970).

⁸Une interprétation simple n'existe que dans le cas des milieux non dispersifs et non absorbants. Dans ce cas on peut définir $U = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}^2/2 + \mu_0 \mu_r \mathbf{H}^2/2$ comme la densité d'énergie électromagnétique instantanée.

- [2] J.D. Jackson, *Electrodynamique Classique* (Dunod, Paris, 2001).
- [3] L. Landau et E. Lifschitz, *Electrodynamique des Milieux Continus* (Mir, Moscsou, 1969) ;
L. D. Landau, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, *Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon Press, Oxford, 1984).
- [4] A. Zangwill, *Modern Electrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013)

Chapitre 3

Propriétés électromagnétiques des matériaux

Objectifs

- Discuter qualitativement les processus d'absorption dans les grandes classes de matériaux.
- Présenter quelques modèles de constante diélectrique.

3.1 Un exemple : mécanismes d'absorption dans l'eau liquide

L'eau sous forme liquide présente des propriétés électromagnétiques très particulières. La Fig. 3.1 montre le spectre de l'indice complexe $n = n' + in''$ de l'eau sur une large gamme spectrale allant de l'ultraviolet aux radiofréquences.

Si l'on suit les courbes de droite à gauche, on observe différents régimes :

- Basses fréquences ($\nu < 100$ MHz, $\lambda > 1$ m)
Dans cette gamme spectrale, il n'y a pas de mécanisme induisant une absorption notable. Les propriétés de l'eau sont très proches des propriétés électrostatiques ($\nu = 0$). On a ainsi $n' \simeq 9$ et $n'' < 10^{-2}$ (ce qui donne $\epsilon_r \simeq n'^2 \simeq 80$ qui est la valeur connue de la constante diélectrique de l'eau en électrostatique). La conductivité statique étant faible, il y a très peu de dissipation.
- Domaine des micro-ondes ($0,1 \text{ cm} \leq \lambda \leq 10 \text{ cm}$, $1 \text{ GHz} \leq \nu \leq 100 \text{ GHz}$) :
Dans les liquides formés de molécules polaires (cas de l'eau), on observe une polarisation due à l'orientation des moments dipolaires permanents sous l'action du champ électrique. En régime dynamique, le travail effectué par le champ sur les molécules est transformé en chaleur sous l'effet des collisions intermoléculaires. On a donc un mécanisme d'absorption qui est bien décrit par le modèle de relaxation de Debye que nous présentons dans la partie suivante. Pour l'eau pure, on observe une absorption importante lorsque $\omega = 2\pi\nu \simeq 1/\tau$, où τ est le temps de relaxation de la polarisation d'orientation du fait des collisions

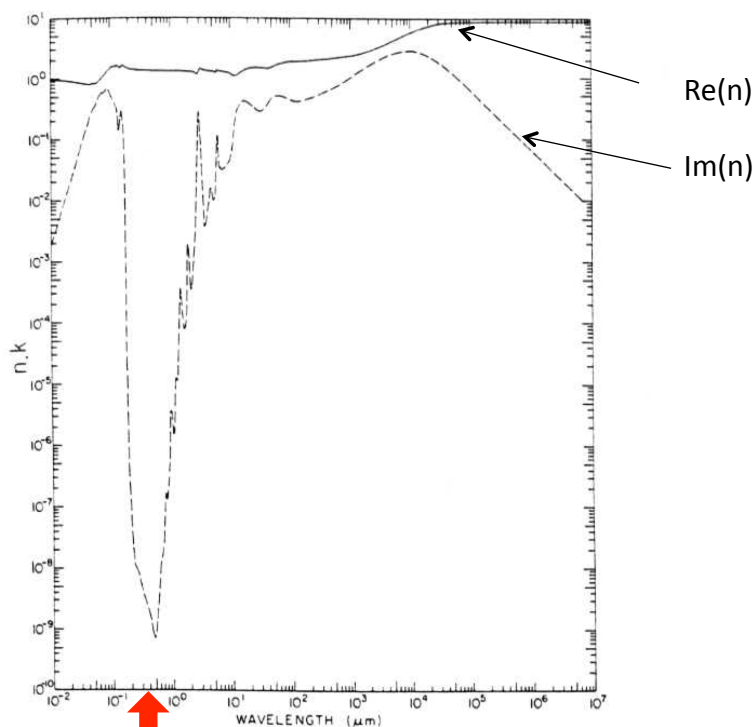


Fig. 1. Log-log plot n (solid line) and k (dashed line) versus wavelength in micrometers for water. **visible**

Figure 3.1: Variations de l'indice de l'eau en fonction de la longueur d'onde (en μm). Trait continu : partie réelle (notée n dans les ouvrages anglo-saxons). Trait pointillé : partie imaginaire (notée k dans les ouvrages anglo-saxons).

moléculaires, ce qui donne $\lambda \simeq 10^4$ μm et qui correspond au premier pic très large sur la Fig. 3.1. C'est l'existence de ce pic d'absorption qui stoppa pendant la Seconde Guerre mondiale le développement de radars ayant des longueurs d'onde de plus en plus courte afin d'améliorer leur résolution. L'absorption dans l'air humide fait chuter rapidement la distance de propagation lorsque λ s'approche de 10^4 μm . C'est également ce mécanisme d'absorption qui est utilisé pour chauffer de l'eau dans un four micro-ondes.

- Domaine térahertz et infrarouge ($1 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 100 \mu\text{m}$, quelques THz $\leq \nu \leq 100$ THz) :
Dans cette gamme de longueurs d'onde, il devient possible d'exciter les modes de vibration intermoléculaires ($\lambda \simeq 10 - 100 \mu\text{m}$) puis intramoléculaires ($\lambda \simeq 1 - 10 \mu\text{m}$). Les premiers modes sont dus à des interactions entre molécules (oscillations d'une molécule couplée à ses voisines), et les seconds modes sont ceux de la molécule d'eau elle-même. Les vibrations intermoléculaires produisent des pics plus larges que les modes de vibration intramoléculaires. Notons que cette distinction entre les deux types de vibrations n'a de sens que pour les liquides, dans lesquels la notion de molécules ayant des modes propres identifiables garde encore son sens (ce qui n'est plus le cas dans un solide).
- Domaine visible ($400 \text{ nm} \leq \lambda \leq 800 \text{ nm}$) :
Dans ce domaine, ce sont habituellement les niveaux électroniques qui contribuent à l'absorption. Pour l'eau, la structure des niveaux électroniques fait que le visible cor-

respond à une bande de transparence (notons l'échelle logarithmique, le creux de transparence correspond à plusieurs ordres de grandeur sur n''). Le domaine visible coïncide donc exactement avec la fenêtre de transparence de l'eau liquide. C'est une propriété remarquable.

- Domaine ultraviolet :

On observe un large pic d'absorption de l'eau vers $\lambda = 0,1 \mu\text{m}$, qui provient d'une excitation électronique très efficace de la molécule d'eau.

Un autre point à remarquer sur la Fig. 3.1 est que chaque pic d'absorption (pic dans le spectre de $n'' = \text{Im}(n)$) correspond à une variation de $n' = \text{Re}(n)$ ayant la forme indiquée sur la Fig. 2.4 du chapitre 2. C'est la manifestation du lien entre absorption et dispersion décrit par les relations de Kramers-Kronig. Au voisinage d'un pic d'absorption, il y a toujours forte dispersion de la partie réelle de l'indice.

3.2 Polarisation d'orientation et relaxation diélectrique

3.2.1 Modèle de Debye

Dans le cas d'un gaz ou d'un liquide formé de molécules polaires (comme l'eau), les molécules vont s'aligner sous l'action d'un champ électrostatique \mathbf{E} , en minimisant l'énergie d'interaction $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ où \mathbf{p} est le moment dipolaire permanent des molécules. L'orientation des molécules crée une densité de polarisation électrostatique $\mathbf{P}_s = \epsilon_0(\epsilon_s - 1)\mathbf{E}$ avec ϵ_s la constante diélectrique statique. Si l'on coupe brutalement le champ à l'instant $t = 0$, les collisions avec les autres molécules vont détruire progressivement l'alignement, et la polarisation d'orientation va décroître comme $\exp(-t/\tau)$ avec un temps caractéristique τ (temps de relaxation).

En régime dynamique, la densité de polarisation $\mathbf{P}(t)$ s'établit sous l'effet des deux mécanismes d'orientation par le champ électrique et de désalignement par collisions. Ceci se traduit par une équation dynamique de la forme

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt}(t) = -\frac{1}{\tau}\mathbf{P}(t) + A\mathbf{E}(t) \quad (3.1)$$

où A est une constante. En régime monochromatique, on écrit $\mathbf{P}(t) = \text{Re}[\mathbf{P}_0 \exp(-i\omega t)]$ et $\mathbf{E}(t) = \text{Re}[\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)]$, et les amplitudes complexes sont reliées par

$$\mathbf{P}_0 = \frac{A\tau}{1 - i\omega\tau} \mathbf{E}_0. \quad (3.2)$$

En régime statique ($\omega = 0$) on obtient directement $A\tau = \epsilon_0(\epsilon_s - 1)$, ce qui détermine la constante A . De plus, par définition de la constante diélectrique dynamique, on a

$$\mathbf{P}_0 = \epsilon_0[\epsilon_r(\omega) - 1]\mathbf{E}_0 \quad (3.3)$$

d'où

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\epsilon_s - 1}{1 - i\omega\tau}. \quad (3.4)$$

Cette expression donne un maximum de $\text{Im}[\epsilon_r(\omega)]$ (absorption) pour $\omega\tau \simeq 1$. Pour l'eau pure, on a $\tau \simeq 10^{-11}$ s, et ce modèle explique bien l'absorption dans le domaine micro-ondes pour $\omega \simeq 100$ GHz ou $\lambda \simeq 2$ cm ($2 \cdot 10^4 \mu\text{m}$) sur la Fig. 3.1.

3.2.2 Modèle de Cole-Cole

Dans les polymères, les mécanismes de polarisation d'orientation et de relaxation entrent de la même manière en ligne de compte mais les interactions avec de nombreux modes mécaniques rendent la dynamique de relaxation plus complexe. Un modèle très utilisé est le modèle de Cole-Cole, qui décrit l'interaction entre le champ électrique et le polymère avec une constante diélectrique de la forme [1]

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\epsilon_s - 1}{(1 - i\omega\tau)^{1-\beta}} \quad (3.5)$$

où β est un paramètre compris entre 0 et 1 ($\beta = 0$ correspond au modèle de Debye). Cette forme de la constante diélectrique permet de prendre en compte la présence de nombreux modes de relaxation, ayant chacun leur propre temps caractéristique.

3.3 Métaux

3.3.1 Contribution des électrons libres. Modèle de Drude

Les métaux contiennent des électrons libres (électrons de la bande de conduction). Ceux-ci jouent un rôle important pour les propriétés optiques dans le visible et le proche infrarouge. La constante diélectrique d'un métal modélisé par un gaz d'électrons libres est donnée par le modèle de Drude. Ce modèle s'applique également aux semi-conducteurs dopés (pour la contribution due aux électrons de la bande de conduction) ou aux plasmas.

Dans ce modèle, on traite la dynamique d'un électron à la position \mathbf{r} soumis au champ électrique par l'équation classique

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + m\Gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -e \mathbf{E}(t) \quad (3.6)$$

où m est la masse de l'électron. Le paramètre $\Gamma = 1/\tau$ modélise les pertes par collisions (phonons, défauts, impuretés dans un solide), τ étant le temps moyen entre deux collisions. En régime monochromatique, on écrit $\mathbf{E}(t) = \text{Re}[\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)]$ et on cherche une solution sous la forme $\mathbf{r}(t) = \text{Re}[\mathbf{r}_0 \exp(-i\omega t)]$. On obtient :

$$\mathbf{r}_0 = \frac{e \mathbf{E}_0}{m(\omega^2 + i\Gamma\omega)}. \quad (3.7)$$

La densité de polarisation s'écrit $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$, avec N la densité volumique d'électrons libres et $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}_0$ le moment dipolaire associé à un électron. En utilisant $\mathbf{P} = \epsilon_0[\epsilon_r(\omega) - 1]\mathbf{E}_0$, on obtient l'expression de la constante diélectrique du modèle de Drude

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\Gamma\omega} \quad (3.8)$$

où $\omega_p^2 = Ne^2/(m\epsilon_0)$ est la pulsation de plasma.

L'application de l'expression (3.8) à la modélisation de la réflectivité de l'aluminium est présentée sur la Fig. 3.2. Pour $\omega < \omega_p$, le métal est très réfléchissant. La réflectivité chute pour $\omega > \omega_p$ (le matériau tend à devenir transparent pour $\omega \gg \omega_p$).

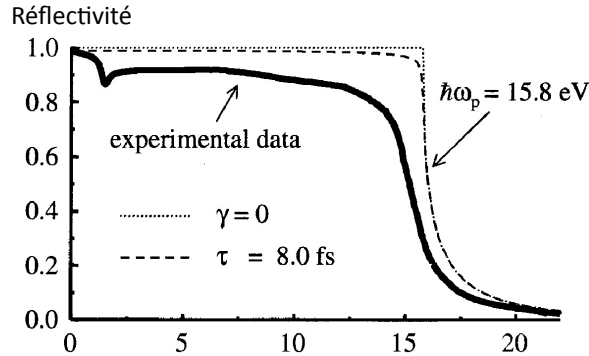


Figure 3.2: Spectre de réflectivité d'une surface plane d'aluminium (ligne continue). La courbe en pointillés est obtenue avec le modèle de Drude avec $\tau = 1/\Gamma = 8$ fs (les pointillés fins correspondent au calcul effectué en négligeant les pertes, $\Gamma = 0$).

Finalement, notons qu'aux basses fréquences ($\omega \ll \Gamma$), on obtient

$$\epsilon_r(\omega) \simeq i \frac{\omega_p^2}{\Gamma\omega} = i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \quad (3.9)$$

où la dernière égalité vient de l'expression (2.41) du chapitre 2. On obtient alors $\sigma = \omega_p^2 \epsilon_0 / \Gamma = Ne^2 \tau / m$ qui est la conductivité électrique statique du modèle de Drude [2,3].

3.3.2 Transitions inter-bandes

Les propriétés des métaux dans le domaine visible ne peuvent pas toutes être décrites par le modèle de Drude. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que la pulsation de plasma étant dans le domaine UV (par exemple pour l'or on a $\omega_p = 7,25 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-1} = 138 \text{ nm}$), les métaux de Drude sont tous très réfléchissants dans le visible. Or tous les métaux ne sont pas des miroirs à spectre plat. Certains métaux sont colorés (en réflexion le cuivre est rouge, l'or est jaune) ce qui traduit d'autres mécanismes d'absorption du rayonnement.

Les spectres de réflectivité de différents métaux (Cu, Au, Ag) sont présentés sur la Fig. 3.3. On remarque que, contrairement au cas de l'aluminium, ces métaux ont une réflectivité qui chute bien avant ω_p .

Cette chute de la réflectivité s'explique par le fait que dans ces métaux des transitions inter-bandes sont possibles à des énergies correspondant aux longueurs d'onde du visible. La structure de bandes du cuivre est représentée sur la Fig. 3.3. Les électrons des bandes d peuvent absorber un photon visible et effectuer une transition vers la bande de conduction. Ce processus a une probabilité importante car la densité d'états électroniques est élevée dans la zone où les bandes d sont quasiment horizontales. C'est ce mécanisme qui est responsable de la couleur rouge du cuivre massif (ou de la couleur jaune de l'or massif). Notons que pour des métaux comme l'argent, le rôle des transitions inter-bandes peut être pris en compte de manière effective en utilisant une valeur de $\epsilon_r(\omega \rightarrow \infty)$ différente de 1 dans le modèle de Drude. On écrit alors la

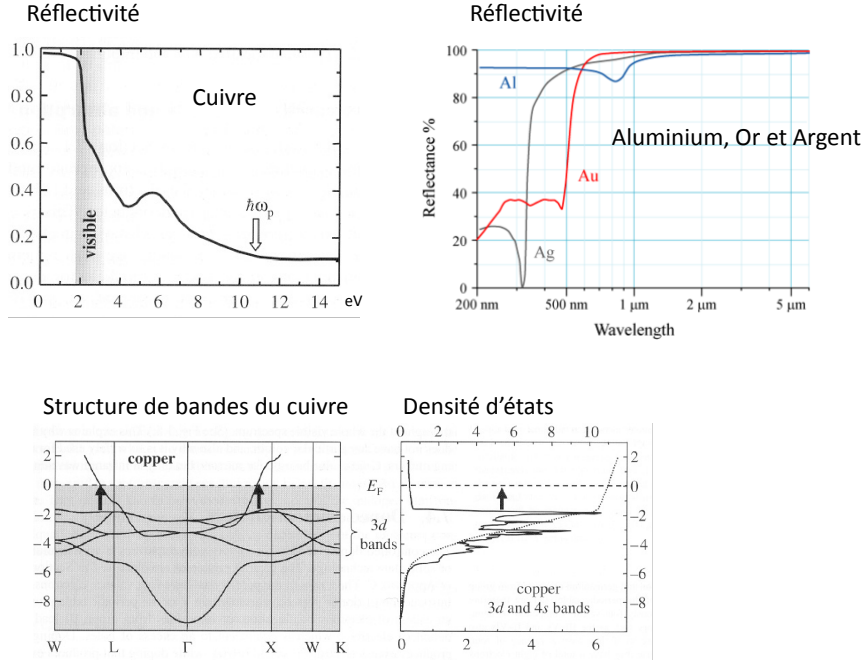


Figure 3.3: Haut : réflectivité de surfaces planes de cuivre, d'or et d'argent. Bas : structure de bandes et densité d'états électroniques dans le cas du cuivre. Les transitions interbandes indiquées par les flèches verticales sont responsables de l'absorption dans le visible, et de la coloration rouge du cuivre.

constante diélectrique sous la forme $\epsilon_r(\omega) = \epsilon_\infty - \omega_p^2/(\omega^2 + i\Gamma\omega)$, la valeur de ϵ_∞ devant être ajustée sur des données expérimentales [4].

3.4 Modèle de l'électron élastiquement lié

Pour modéliser un matériau polarisable dilué (un gaz d'atomes ou de molécules), on calcule le moment dipolaire induit dans chaque atome puis on déduit la densité de polarisation \mathbf{P} en utilisant la densité volumique d'atomes. On modélise l'atome par un électron (considéré comme une particule classique de masse m et de charge e) lié au noyau par une force de rappel élastique de la forme $\mathbf{F} = -m\omega_0^2\mathbf{r}$, où \mathbf{r} est la position de l'électron. La pulsation ω_0 est la pulsation de résonance de la liaison élastique. En présence du champ exciteur, le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron s'écrit

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -e\mathbf{E} - m\omega_0^2\mathbf{r} - m\Gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (3.10)$$

où \mathbf{E} est le champ électrique à la position de l'électron au repos ($\mathbf{r} = 0$) et Γ décrit les pertes d'énergie (par rayonnement et collisions). Dans le cas d'une excitation monochromatique, de la forme $\mathbf{E}(t) = \text{Re}[\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)]$, on peut chercher la solution en régime permanent sous la forme

$\mathbf{r}(t) = \text{Re}[\mathbf{r}_0 \exp(-i\omega t)]$. On obtient

$$\mathbf{r}_0 = \frac{-e \mathbf{E}_0 / m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma \omega}. \quad (3.11)$$

Le moment dipolaire induit dans l'atome est $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}$, et la densité de polarisation est $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$ où N est le nombre d'atomes par unité de volume.¹ En écrivant $\mathbf{P} = \epsilon_0[\epsilon_r(\omega) - 1]\mathbf{E}$, on obtient

$$\epsilon_r(\omega) = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma \omega}. \quad (3.12)$$

Bien que découlant d'un calcul purement classique, cette expression a la même forme que le résultat issu du calcul quantique, ce qui explique le succès de ce modèle simple (dit modèle d'oscillateur de Lorentz) pour décrire un matériau polarisable dilué. Dans le cas quantique, la fréquence de transition ω_0 est remplacée par la fréquence de Bohr de la transition électronique mise en jeu. En général, plusieurs transitions interviennent et la forme générale de la constante diélectrique d'un gaz d'atomes fait intervenir une sommation sur un ensemble de transitions.

3.5 Cristaux polaires

Les propriétés optiques (visible et infrarouge) des cristaux polaires (dits aussi cristaux ioniques) ne peuvent être comprises qu'en considérant la structure cristalline et le fait que tous les atomes sont en interaction. Les modes de vibration collectifs des atomes du réseau cristallin sont responsables de l'absorption et de la dispersion.

Un modèle classique pour ce type de cristaux est celui de la chaîne linéaire d'atomes élastiquement liés (liés par des potentiels harmoniques). Les modes de vibration qui apparaissent se comportent comme des ondes caractérisées par un vecteur d'onde, une fréquence et un caractère de vibration longitudinal ou transverse. Ces modes peuvent être traités quantiquement, et sont alors appelés *phonons* (de même que le rayonnement électromagnétique quantifié conduit à la notion de photons). Un phonon peut alors être excité par le rayonnement électromagnétique et changer de niveau d'énergie, créant ainsi un mécanisme d'absorption pour le rayonnement. Les phonons susceptibles d'émettre et d'absorber le rayonnement électromagnétique sont les phonons dits "optiques", pour lesquels la vibration s'effectue à l'intérieur de la maille cristalline (voir Fig. 3.4, schéma de gauche). Lorsque la maille contient au-moins deux atomes ayant des charges opposées (cas d'un cristal polaire ou ionique), il apparaît un moment dipolaire oscillant responsable du couplage avec le champ électromagnétique. Les phonons pour lesquels la vibration de la maille s'effectue en bloc (et qui n'engendrent donc pas de moment dipolaire électrique) sont dits phonons "acoustiques". Ils sont responsables de la propagation des ondes sonores dans les solides. Pour un traitement détaillé, voir par exemple [2,3].

Dans le cadre de ce modèle, on peut calculer le moment dipolaire induit dans une maille par l'action d'un champ électromagnétique extérieur, et en déduire la densité de polarisation et la constante diélectrique (pour le calcul détaillé, voir par exemple la réf. [3], chapitre 27). On obtient :

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_\infty \left[1 + \frac{\omega_L^2 - \omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \right] \quad (3.13)$$

¹Cette relation simple est vraie pour un milieu dilué (un gaz par exemple).

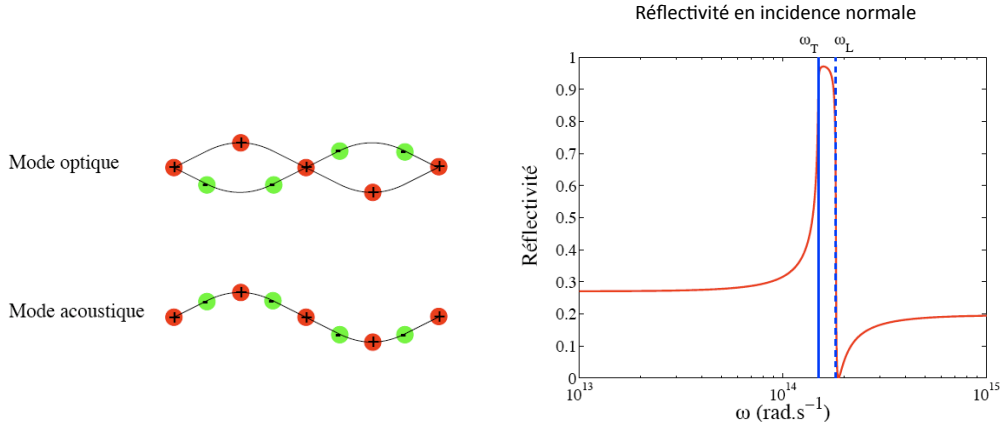


Figure 3.4: Gauche : représentation schématique des modes de vibrations associés aux phonons optiques et acoustiques. Droite : allure du spectre de réflectivité d’un cristal polaire. Les fréquences ω_T et ω_L sont en général dans le domaine infrarouge.

où ω_T et ω_L sont des fréquences caractéristiques des vibrations transverse et longitudinale du réseau cristallin. Le facteur Γ décrit les pertes d’énergie (transformation de l’énergie contenue dans les vibrations collectives en chaleur). L’expression de la constante diélectrique montre une résonance au voisinage de la fréquence ω_T . De plus, la zone spectrale $[\omega_T, \omega_L]$ correspond à une forte réflectivité du cristal polaire, avec l’allure typique tracée sur la Fig. 3.4 (courbe de droite).

En pratique, les différents paramètres de l’expression (3.13) sont obtenus expérimentalement pour chaque matériau [4]. La Fig. 3.5 montre les variations de l’indice complexe $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)}$ en fonction de la longueur d’onde $\lambda = 2\pi c/\omega = c/\nu$ pour deux cristaux (NaCl et SiC). La résonance décrite par l’Eq. (3.13) s’observe au voisinage de $\lambda = 100 \mu\text{m}$ pour NaCl et de $\lambda = 10 \mu\text{m}$ pour SiC. Plus précisément, pour SiC on a $\lambda_T = 2\pi c/\omega_T = 12,6 \mu\text{m}$ qui donne la position du pic [4].

3.6 Semiconducteurs

Dans un isolant ou un semiconducteur, la bande la plus haute peuplée à $T = 0 \text{ K}$ est pleine, et porte le nom de bande de valence. La bande de conduction (bande située en énergie au-dessus de la bande de valence) est vide. Il n’y a pas de conduction électrique, une bande pleine ou une bande vide ne pouvant pas engendrer un courant électrique. Dans un métal, la bande de conduction est partiellement remplie même à $T = 0 \text{ K}$, ce qui permet la conduction électrique. L’énergie séparant la bande de valence et la bande de conduction est appelée énergie de gap, et notée E_g . Dans un isolant, E_g est trop élevée devant $k_B T$ pour que même en chauffant le matériau, on puisse porter des électrons de la bande de valence à la bande de conduction. Dans un semiconducteur, $k_B T$ peut suffire à peupler légèrement la bande de conduction, et donc à rendre le matériau conducteur (d’où l’appellation de “semiconducteur”). Les notions de bande

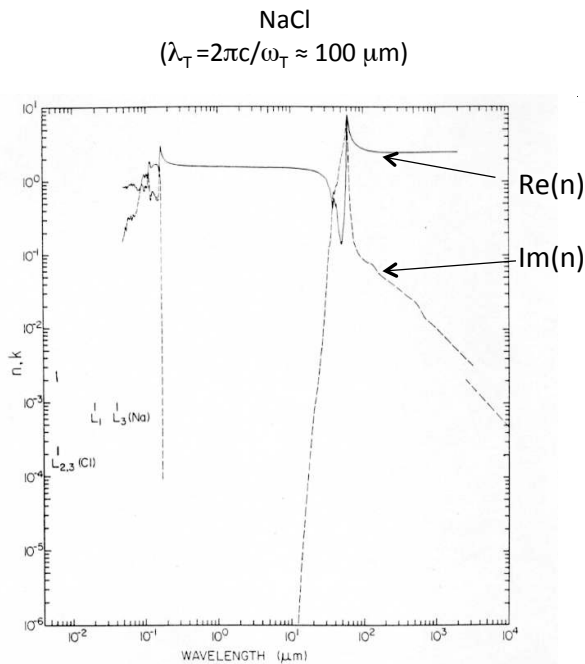


Fig. 13. Log-log plot of n (—) and k (----) versus wavelength in micrometers for sodium chloride.

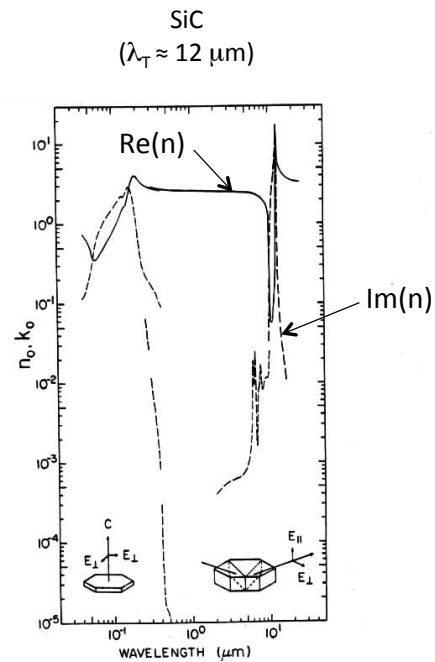


Fig. 13. Log-Log plot of n_0 (—) and k_0 (----) versus wavelength in micrometers for silicon carbide. Typical sample orientations are shown in the insets.

Figure 3.5: Indice complexe de NaCl et de SiC (cristaux polaires) en fonction de la longueur d'onde. On observe les pics d'absorption, et la dispersion de $\text{Re}(n)$ associée, au voisinage de $\lambda = 100 \mu\text{m}$ pour NaCl et de $\lambda = 12 \mu\text{m}$ pour SiC.

de valence, de bande de conduction et d'énergie de gap sont illustrées sur la Fig. 3.6.

Concernant les propriétés optiques, l'énergie de gap a un rôle essentiel. Lorsque $\hbar\omega > E_g$, un électron peut absorber un photon en effectuant une transition de la bande de valence à la bande de conduction. C'est le mécanisme principal d'interaction entre la lumière et un semiconducteur intrinsèque (non dopé). On retiendra donc qu'un semiconducteur intrinsèque est transparent pour les fréquences $\omega < E_g/\hbar$, et absorbant (ou fortement réfléchissant) pour $\omega > E_g/\hbar$. Pour le silicium, on a $E_g \simeq 1,1 \text{ eV}$, de telle sorte que le silicium est transparent dans l'infrarouge, et absorbant dans le visible. De plus des semiconducteurs comme Si ou Ge présentent de fortes valeurs de $\text{Re}(n)$ dans le visible (de l'ordre de 3,5 à 4), ce qui est très utile pour certaines applications de photonique (mais est aussi un défaut pour d'autres applications comme la conception de cellules photovoltaïques car il faut dans ce cas réduire la réflexion en utilisant un traitement antireflet).

Finalement, rappelons qu'il est possible de doper un semiconducteur en introduisant des impuretés jouant le rôle de donneurs ou accepteurs d'électrons. On peuple alors artificiellement la bande de conduction avec des électrons (semiconducteurs dopés n) ou la bande de valence avec des trous (semiconducteurs dopés p). Ces bandes partiellement remplies de porteurs de charges contribuent alors aux propriétés optiques comme les électrons libres d'un métal. On peut décrire ces contributions avec le modèle de Drude. La différence essentielle avec un métal est que la

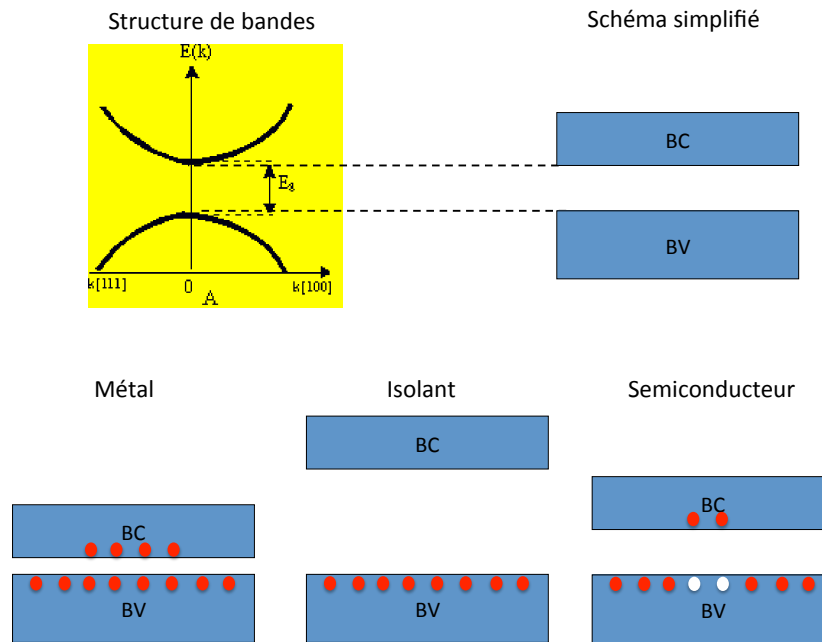


Figure 3.6: Haut : allure des bandes de valence (BV) et de conduction (BC) électroniques dans un cristal, et schéma simplifié faisant apparaître les deux bandes et l'énergie de gap E_g . Bas : représentation schématique du peuplement des bandes électroniques dans le cas d'un métal, d'un isolant et d'un semiconducteur.

densité de porteurs N (et donc la fréquence plasma ω_p) est contrôlée par le dopage.

Références

- [1] G. Strobl, *The Physics of Polymers* (Springer, Berlin, 1996), chap. 5, section 5.2.
- [2] C. Kittel, *Physique de l'Etat Solide* (Dunod, Paris, 1998).
- [3] N.W. Ashcroft and N.D. Mermin, *Physique des Solides* (EDP Sciences, Les Ulis, 2002).
- [4] E.D. Palik (ed.), *Handbook of Optical Constants of Solids* (Academic Press, Boston, 1991).

Chapitre 4

Ondes électromagnétiques aux interfaces

Objectifs

- Etablir les lois de la réflexion et de la transmission à une interface plane.
- Calculer les facteurs de Fresnel en amplitude et en énergie.
- Discuter physiquement quelques comportements généraux.

4.1 Lois de Snell-Descartes

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'interaction d'une onde plane incidente avec une interface plane séparant deux milieux linéaires, homogènes et isotropes. Les propriétés électromagnétiques des deux milieux sont décrites par les indices de réfraction n_1 et n_2 (voir Fig. 4.1). L'interaction donne naissance à une onde plane réfléchie, et une onde plane transmise. Dans cette première partie on se limite à des milieux non absorbants (n_1 et n_2 réels) et on cherche à déterminer les directions de propagation des ondes réfléchie et transmise, comme dans le problème initialement étudié par Snell et Descartes en termes de propagation de rayons lumineux.

4.1.1 Principe général

L'idée générale qui conduit aux lois de Snell-Descartes est l'invariance par translation parallèlement à l'interface. Notons $\exp(i\mathbf{k}^i \cdot \mathbf{r})$, $\exp(i\mathbf{k}^r \cdot \mathbf{r})$ et $\exp(i\mathbf{k}^t \cdot \mathbf{r})$ les dépendances spatiales des ondes incidente, réfléchie et transmise. Ces trois ondes sont reliées par des relations de continuité dans le plan $z = 0$, et ces relations doivent rester identiques quels que soient x et y dans ce plan. On en déduit donc que les dépendances en x et y des trois ondes doivent être les mêmes, ce qui impose

$$\mathbf{k}_{\parallel}^i = \mathbf{k}_{\parallel}^r = \mathbf{k}_{\parallel}^t, \quad (4.1)$$

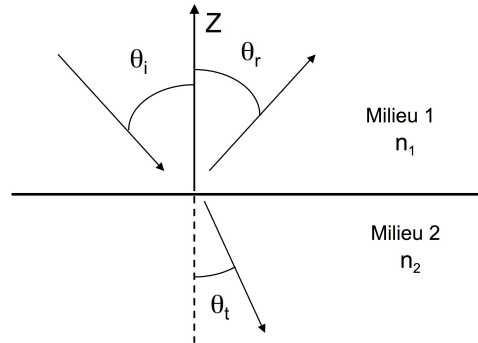


Figure 4.1: Géométrie considérée pour la détermination des lois de Snell-Descartes.

où le symbole \parallel désigne la composante d'un vecteur parallèle à l'interface $z = 0$. Cette relation est l'expression la plus générale des lois de Snell-Descartes. On peut en déduire l'écriture habituelle des lois de la réflexion et de la transmission comme nous allons le voir.

4.1.2 Lois de la réflexion

La condition $\mathbf{k}_{\parallel}^i = \mathbf{k}_{\parallel}^r$ implique la conservation des composantes selon Ox et selon Oy du vecteur d'onde : $k_x^i = k_x^r$ et $k_y^i = k_y^r$. On en déduit que le vecteur d'onde (ou le rayon) réfléchi reste dans le plan d'incidence défini par le vecteur \mathbf{k}^i et l'axe Oz . C'est la première loi de Snell-Descartes pour la réflexion.

Cette condition implique également la conservation du module du vecteur d'onde parallèle à l'interface, ce qui s'écrit $n_1 \omega/c \sin \theta_i = n_1 \omega/c \sin \theta_r$, et qui implique donc

$$\theta_r = \theta_i. \quad (4.2)$$

Cette relation exprime la seconde loi de Snell-Descartes pour la réflexion.

4.1.3 Lois de la transmission

Dans le cas de la transmission, la première loi de Snell-Descartes stipule de la même manière que le vecteur d'onde (ou le rayon) transmis reste dans le plan d'incidence. La conservation du module du vecteur d'onde s'écrit $n_1 \omega/c \sin \theta_i = n_2 \omega/c \sin \theta_t$ ce qui donne

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t, \quad (4.3)$$

qui est la seconde loi de Snell-Descartes pour la transmission. Elle montre que le vecteur d'onde transmis n'a pas la même direction que le vecteur d'onde incident : c'est le phénomène de réfraction.

4.2 Facteurs de Fresnel en amplitude

Caractériser la réflexion et la transmission à une interface revient non seulement à déterminer les directions de propagation, mais également la fraction de l'amplitude de l'onde incidente qui est réfléchi ou transmise. Ce sont les facteurs de réflexion et de transmission de Fresnel qui donnent cette information.

L'état de polarisation d'une onde électromagnétique plane se décompose sur une base à deux composantes (par exemple deux directions de polarisations rectilignes perpendiculaires, ou les deux polarisations circulaires droite et gauche). On définit les facteurs de Fresnel pour les deux polarisations rectilignes fondamentales transverse électrique (dite TE ou *s*) et transverse magnétique (dite TM ou *p*), représentées sur la Fig. 4.2.

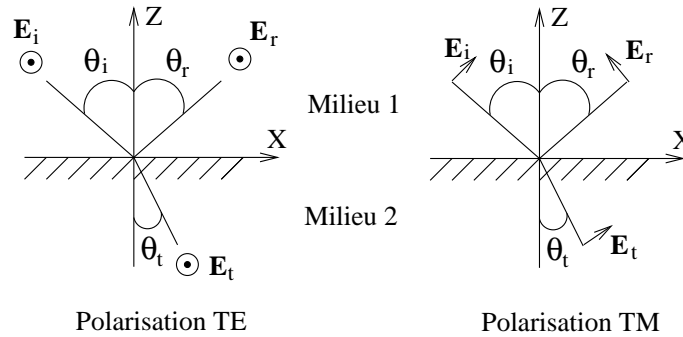


Figure 4.2: Géométrie du système considéré pour définir les facteurs de réflexion et de transmission de Fresnel.

Nous considérons maintenant des matériaux qui peuvent éventuellement être absorbants. Par souci de simplicité nous nous limitons aux matériaux non magnétiques ($\mu_r = 1$), mais la démarche peut être généralisée. Leurs propriétés électromagnétiques sont décrites par les indices complexes n_1 (milieu $z > 0$) et n_2 (milieu $z < 0$). Afin de déterminer les facteurs de Fresnel, nous allons utiliser les relations de continuité des champs électrique et magnétique à l'interface $z = 0$.

4.2.1 Relations de continuité des champs

Afin de résoudre le problème, nous avons besoin de deux relations de continuité à l'interface (voir chapitre 2, section 2.2). Il est pratique d'utiliser les relations faisant intervenir les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} :

$$\mathbf{E}_{\parallel}^1(z=0) = \mathbf{E}_{\parallel}^2(z=0)$$

$$\mathbf{H}_{\parallel}^1(z=0) = \mathbf{H}_{\parallel}^2(z=0).$$

Les exposants 1 et 2 font référence au champ total calculé dans les milieux 1 et 2, respectivement (dans le milieu 1, le champ total est la somme du champ incident et du champ réfléchi).

4.2.2 Calcul des facteurs de Fresnel en polarisation TE

On écrit les champs électriques incident, réfléchi et transmis sous la forme (voir Fig. 4.2)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_i &= E_0 \mathbf{e}_y \exp[i(k_x x - k_z^1 z)] \\ \mathbf{E}_r &= r_s E_0 \mathbf{e}_y \exp[i(k_x x + k_z^1 z)] \\ \mathbf{E}_t &= t_s E_0 \mathbf{e}_y \exp[i(k_x x - k_z^2 z)].\end{aligned}$$

Ces champs sont polarisés selon \mathbf{e}_y (vecteur unitaire de l'axe Oy), ce qui correspond bien à la polarisation TE. Dans ces expressions, on a omis la dépendance temporelle en $\exp(-i\omega t)$ et on a utilisé les lois de Snell-Descartes (la composante k_x du vecteur d'onde est conservée). Dans le cas où le milieu incident est transparent (n_1 réel), ce qui est le cas le plus fréquent, la composante selon x du vecteur d'onde s'écrit simplement

$$k_x = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \theta_i \quad (4.4)$$

où θ_i est l'angle d'incidence. Cependant le formalisme reste applicable dans le cas plus compliqué où k_x serait complexe (onde incidente évanescence dans la direction Ox).

Chacune des ondes doit vérifier l'équation de Helmholtz dans son milieu de propagation, ce qui entraîne $k_x^2 + (k_z^j)^2 = n_j^2 \omega^2 / c^2$, pour $j = 1, 2$. Les composantes selon Oz des vecteurs d'onde dans les deux milieux sont donc données par

$$k_z^j = \left(n_j^2 \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 \right)^{1/2}. \quad (4.5)$$

On choisit le signe de la racine carrée de sorte que $\text{Re}(k_z^j) \geq 0$ et $\text{Im}(k_z^j) \geq 0$.

Lorsque le milieu incident est transparent (n_1 réel), la direction d'incidence θ_i fixe $k_x = n_1 \omega / c \sin \theta_i$. On a alors simplement $k_z^1 = n_1 \omega / c \cos \theta_i$ qui reste réel et décrit une onde incidente et une onde réfléchie propagatives. Par contre, le vecteur d'onde selon Oz de l'onde transmise k_z^2 peut lui être complexe. Cette situation se rencontre dans le cas de la réflexion sur un milieu absorbant, et dans le cas de la réflexion totale interne que nous discuterons plus loin.

Les expressions des facteurs de réflexion et de transmission r_s et t_s s'obtiennent en utilisant les relations de continuité des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} à l'interface $z = 0$. La continuité de \mathbf{E}_{\parallel} entraîne

$$1 + r_s = t_s. \quad (4.6)$$

La continuité de \mathbf{H}_{\parallel} revient à écrire celle de H_x , et donc de $\partial E_y / \partial z$ (car $\text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}$ et \mathbf{E} n'a qu'une composante selon Oy). On obtient

$$k_z^1 (1 - r_s) = k_z^2 t_s. \quad (4.7)$$

De ces deux équations, on déduit l'expression des facteurs de Fresnel en amplitude (grandeurs complexes) :

$$r_s = \frac{k_z^1 - k_z^2}{k_z^1 + k_z^2} \quad t_s = \frac{2k_z^1}{k_z^1 + k_z^2}. \quad (4.8)$$

Ces facteurs s'expriment donc directement en fonction des composantes selon Oz des vecteurs d'onde dans les deux milieux. Les expressions ci-dessus sont valables même lorsque l'un des vecteurs d'onde est complexe, et sont donc les plus générales.

Autre écriture dans le cas des milieux transparents

Dans le cas où les ondes sont propagatives (k_z^1 et k_z^2 sont réels), on peut également écrire ces expressions en fonction des angles d'incidence et de transmission en utilisant le fait que $k_z^1 = n_1 \omega/c \cos \theta_i$ $k_z^2 = n_2 \omega/c \cos \theta_t$:

$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad t_s = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} . \quad (4.9)$$

Notons que cette écriture souvent pratique est cependant moins générale que la précédente, qui peut être utilisée même quand les ondes incidente, réfléchie ou transmise sont évanescentes. En particulier cette écriture en fonction des angles d'incidence et de transmission ne peut pas s'appliquer au cas des milieux absorbants et au cas de la réflexion totale interne.

4.2.3 Cas de la polarisation TM

On peut définir des facteurs r_p et t_p de la même manière en utilisant l'amplitude du champ magnétique \mathbf{H} qui est porté par \mathbf{e}_y en polarisation TM. On obtient alors

$$r_p = \frac{n_2^2 k_z^1 - n_1^2 k_z^2}{n_2^2 k_z^1 + n_1^2 k_z^2} \quad t_p = \frac{2n_2^2 k_z^1}{n_2^2 k_z^1 + n_1^2 k_z^2} . \quad (4.10)$$

Pour des ondes propagatives, l'écriture en fonction des angles d'incidence et de transmission donne

$$r_p = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \quad t_p = \frac{2n_2 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} . \quad (4.11)$$

Remarques :

1) Dans certains cas, il peut être utile de définir des facteurs de transmission et de réflexion pour l'amplitude du champ électrique. En polarisation TM, les champs incident, réfléchi et transmis ne sont cependant pas dans la même direction (voir Fig. 4.2). On a alors des facteurs r'_p et t'_p donnés par

$$r'_p = r_p \quad t'_p = \frac{2n_1 n_2 k_z^1}{n_2^2 k_z^1 + n_1^2 k_z^2} . \quad (4.12)$$

2) Le signe des facteurs en polarisation TM dépend du choix du vecteur unitaire \mathbf{e} portant \mathbf{E} . On a choisi ici $\mathbf{e} = \mathbf{u} \times \mathbf{e}_y$, où \mathbf{u} est le vecteur donnant la direction et le sens de propagation de l'onde et \mathbf{e}_y est le vecteur portant le champ magnétique \mathbf{H} . Il s'agit de la convention "naturelle", la plus souvent utilisée.

4.3 Conservation de l'énergie à une interface

4.3.1 Facteurs de Fresnel en énergie

Pour déterminer les facteurs de réflexion et de transmission de Fresnel en énergie, il est nécessaire de calculer les puissances réfléchies et transmises, et donc d'utiliser le vecteur de Poynting. Pour une onde plane monochromatique polarisée rectilignement selon le vecteur unitaire \mathbf{e} , de la forme $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \mathbf{e} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting s'écrit

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\omega \mu_0} |E_0|^2 \operatorname{Re}(\mathbf{k}).$$

Pour calculer les flux d'énergie associés aux champs incident, réfléchi et transmis à travers l'interface $z = 0$, seule la composante selon Oz du vecteur de Poynting est nécessaire. Elle s'écrit

$$\langle \Pi_z \rangle = \frac{1}{2\omega \mu_0} |E_0|^2 \operatorname{Re}(k_z) \mathbf{e}_z$$

où k_z est la composante selon Oz du vecteur d'onde. On définit les facteurs de réflexion et de transmission de Fresnel en énergie (souvent appelés *réflectivité* et *transmittivité*) comme les rapports des flux à l'interface :

$$R = \left| \frac{\langle \Pi_z^r \rangle}{\langle \Pi_z^i \rangle} \right| \quad T = \left| \frac{\langle \Pi_z^t \rangle}{\langle \Pi_z^i \rangle} \right| \quad (4.13)$$

où $\langle \Pi_z^i \rangle$, $\langle \Pi_z^r \rangle$, $\langle \Pi_z^t \rangle$ désignent les composantes selon Oz du vecteur de Poynting des champs incident, réfléchi et transmis, respectivement. En utilisant l'expression du vecteur de Poynting pour une onde plane et la définition des facteurs de Fresnel en amplitude r et t , on obtient le résultat suivant, valable pour les deux polarisations TE et TM :

$$R = |r|^2 \quad T = |t|^2 \frac{\operatorname{Re}(k_z^2)}{\operatorname{Re}(k_z^1)}. \quad (4.14)$$

Notons que ce résultat est valable si l'on utilise les facteurs de Fresnel en amplitude définis à partir du champ électrique dans les deux polarisations (il faut notamment utiliser le facteur t'_p en polarisation TM).

Le rapport $\operatorname{Re}(k_z^2)/\operatorname{Re}(k_z^1)$ qui apparaît dans l'expression de T joue un rôle important. Dans le cas où les ondes incidente et transmise sont propagatives, il est égal au rapport $n_2 \cos \theta_t / n_1 \cos \theta_i$ et traduit un effet géométrique dû au fait que la surface $z = 0$ n'est pas vue sous le même angle par les deux ondes. Dans le cas où l'onde transmise est évanescence (k_z^2 est complexe, ou même imaginaire pur), le facteur $\operatorname{Re}(k_z^2)$ peut modifier fortement T par rapport à $|t|^2$. Par exemple, dans le cas de la réflexion totale interne discuté ci-dessous, ce facteur s'annule montrant que $T = 0$ (pas de flux d'énergie transmis) même dans un cas où $|t| \neq 0$ (amplitude du champ transmis non nulle).

4.3.2 Relation de conservation de l'énergie

Dans le cas d'un milieu incident transparent (n_1 réel), on peut vérifier facilement que la relation

$$R + T = 1 \quad (4.15)$$

est satisfaite. Cette relation traduit la conservation de l'énergie à une interface plane. Elle est valable dans les deux cas de polarisation TE et TM.

4.4 Discussion. Cas particuliers

4.4.1 Incidence normale

En incidence normale, il n'y a pas de distinction entre les polarisations TE et TM. Les facteurs de réflexion et transmission en amplitude s'écrivent simplement en fonction des indices de réfraction des deux milieux (éventuellement complexes) :

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}. \quad (4.16)$$

D'une façon générale, on peut retenir que le contraste d'indice pilote la réflexion. Notons l'analogie avec la facteur de réflexion sur une ligne de transmission, qui sera étudié au chapitre 5 (le contraste d'indice joue le même rôle que le contraste d'impédance).

4.4.2 Dépendance angulaire des facteurs de réflexion

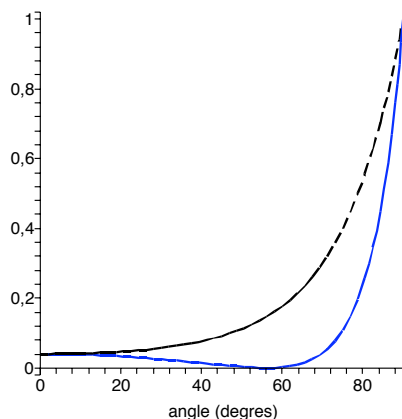


Figure 4.3: Facteurs de réflexion de Fresnel en énergie pour une onde se réfléchissant sur une surface d'indice $n_2 = 1,5$ ($n_1 = 1$). Pointillés (courbe noire) : polarisation TE. Trait continu (courbe bleue) : polarisation TM. En polarisation TM, on observe l'annulation du facteur de réflexion en polarisation TM à l'angle de Brewster.

La dépendance en fonction de l'angle d'incidence θ_i des facteurs de réflexion de Fresnel en énergie est représentée sur la Fig. 4.3., dans le cas de la réflexion sur un matériau d'indice $n_2 = 1.5$ (ce qui correspond au verre dans le visible). En $\theta_i = 0$, on retrouve la valeur de 4% commune aux deux polarisations. Lorsque $\theta_i \rightarrow 90^\circ$, les deux facteurs tendent vers 1. On retiendra qu'en incidence rasante, la réflectivité augmente fortement. C'est le reflet intense du coucher de soleil

sur l'eau que chacun a observé depuis la plage. On observe aussi une annulation du facteur de réflexion en polarisation TM, pour un angle appelé *angle de Brewster*.

L'angle de Brewster θ_B est donné par

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}. \quad (4.17)$$

Lorsqu'on éclaire une surface au voisinage de l'angle de Brewster, la lumière réfléchie est donc fortement polarisée rectilignement (dans la direction correspondant à la polarisation TE).

4.4.3 Absorption par un corps opaque

En conservant les notations de la Fig. 4.2, supposons que le milieu 1 soit le vide ou l'air considéré comme transparent ($n_1 = 1$), et que le milieu 2 soit milieu absorbant (n_2 est complexe). Le champ transmis s'atténue alors exponentiellement dans le matériau. Dans le cas particulier de l'incidence normale, la longueur caractéristique d'atténuation du champ transmis est $\delta = \lambda/(2\pi n_2'')$. C'est l'épaisseur de peau du matériau, que nous avons introduite au chapitre 2. Elle fixe l'ordre de grandeur de l'épaisseur sur laquelle le champ transmis s'annule dans le matériau.

Le corps est dit opaque à une fréquence donnée si δ est très inférieure à son épaisseur. On peut dans ce cas le considérer comme semi-infini du point de vue électromagnétique, et le traiter par une interface simple même si en pratique il s'agit d'une couche d'épaisseur finie. Notons que cette notion dépend de la fréquence. Par exemple, une lame de verre de 1 cm d'épaisseur est transparente dans le visible, mais opaque dans l'infrarouge pour $\lambda > 4 \mu\text{m}$.

Pour un corps opaque, le flux transmis à l'interface est totalement absorbé. On définit l'absorptivité du matériau comme le rapport du flux absorbé au flux incident (cette grandeur est utilisée par exemple pour calculer l'échauffement du matériau). Dans le cas d'une surface plane de corps opaque, l'absorptivité est donc simplement le facteur de transmission de Fresnel en énergie $T = 1 - R$.

4.4.4 Réflexion totale interne

Examinons le cas particulier de deux milieux transparents avec $n_1 > n_2$. L'onde incidente se propage dans le milieu de plus fort indice. Dans ce cas, si l'angle d'incidence θ_i est supérieur à l'angle critique $\theta_c = \arcsin(n_2/n_1)$, il n'y a pas d'onde propagative transmise. Une première façon de le comprendre est d'observer qu'il n'y a pas d'angle de transmission θ_t compatible avec les lois de Descartes dans ce cas. Une autre manière d'appréhender le phénomène est de calculer le vecteur d'onde transmis k_z^2 : celui-ci est imaginaire pur, de la forme $k_z^2 = i\text{Im}(k_z^2)$. L'onde transmise est donc évanescente.

En termes énergétiques, puisque $\text{Re}(k_z^2) = 0$, $T = 0$: il n'y a pas de flux d'énergie transmis à travers l'interface. On a donc $R = 1$, et toute l'énergie est réfléchie, ce qui justifie l'appellation de réflexion totale. Cependant il faut bien garder à l'esprit que si le flux d'énergie transmis est nul, le champ transmis n'est pas nul. Au voisinage de l'interface, l'onde évanescente pénètre dans le milieu 2, sur une profondeur donnée par $1/\text{Im}(k_z^2)$. Cette profondeur peut être calculée en fonction de l'angle d'incidence, et diminue lorsque θ_i s'écarte de l'angle critique θ_c .

Références

- [1] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999), 7ème édition, chapitre 1.
- [2] J.D. Jackson, *Electrodynamique Classique* (Dunod, Paris, 2001), chapitre 7.

Chapitre 5

Lignes de transmission et adaptation d'impédance

Objectifs

- Décrire la propagation des ondes sur les lignes de transmission.
- Introduire la notion d'adaptation d'impédance. Quelques méthodes seront illustrées en TD et pratiquées en TP.

5.1 Approximation quasi-statique et théorie des circuits

Les circuits électriques et électroniques ont en général une dimension caractéristique δ très inférieure aux longueurs d'onde mises en jeu. Dans ces conditions, ils fonctionnent en régime quasi-statique (ou quasi-permanent), dans lequel les effets de retard dus à la vitesse finie de propagation des ondes électromagnétiques sont négligeables.

Table 5.1: ordres de grandeur de fréquences et longueurs d'onde associées.

ν	λ
50 Hz	~ 5000 km
1 MHz	300 m
10 GHz	3 cm
$5 \cdot 10^{14}$ Hz	$\sim 0,5$ μm

5.1.1 Régime quasi-statique

Le régime quasi-statique est celui de la théorie des circuits électroniques, dont les composants élémentaires sont représentés sur la Fig. 5.1.

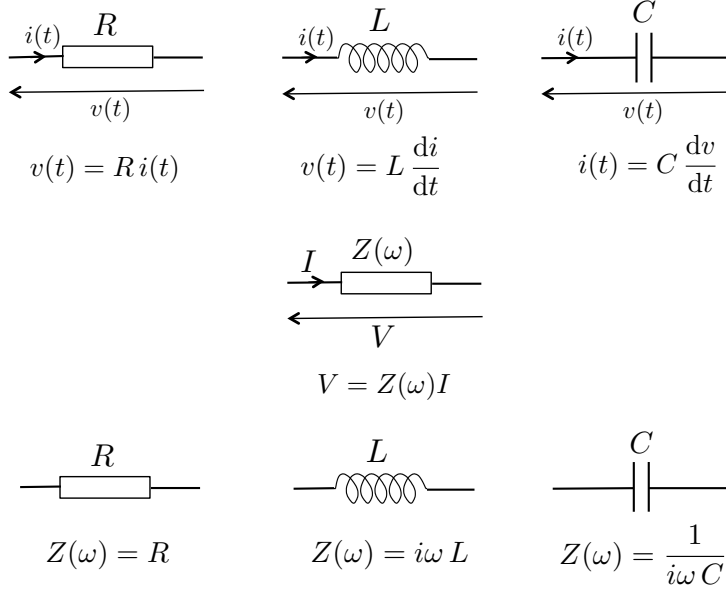


Figure 5.1: Haut : résistance, inductance, capacité et leur équation caractéristique. Bas : impédances des différents composants en régime harmonique (ou monochromatique).

Note : dans ce chapitre on utilise une dépendance temporelle en $\exp(i\omega t)$ pour le régime harmonique, qui est la convention usuelle en électronique et en hyperfréquences.

En régime harmonique et à basse fréquence, on a (chapitre 2, section 2.3.3)

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = i\omega \mathbf{D} = i\omega \epsilon_0 \epsilon_s \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E} \quad (5.1)$$

où ϵ_s est la constante diélectrique statique¹ et σ la conductivité du matériau. En ordre de grandeur, on a $\mathbf{rot} \mathbf{H} \sim \mathbf{H}/\delta \sim \mathbf{B}/(\mu_0 \mu_s \delta)$, δ étant l'échelle caractéristique de variation spatiale des champs (comparable à la taille du circuit). Comme d'autre part $\mathbf{rot} \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B}$, on a $\mathbf{E}/\delta \sim \omega \mathbf{B}$, et donc finalement

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} \sim \frac{\mathbf{E}}{\mu_0 \mu_s \omega \delta^2}. \quad (5.2)$$

Le premier terme du membre de droite de l'Eq. (5.1) est négligeable devant $\mathbf{rot} \mathbf{H}$ si la condition $\omega \epsilon_0 \epsilon_s |\mathbf{E}| \ll |\mathbf{E}|/(\mu_0 \mu_s \omega \delta^2)$ est vérifiée, à condition que $\omega^2 \epsilon_0 \epsilon_s \mu_0 \mu_s \delta^2 \ll 1$, ce qui s'écrit également

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_s}\right)^2 \delta^2 \ll 1 \quad (5.3)$$

¹Avec la convention en $\exp(i\omega t)$, différente de celle du chapitre 2, la constante diélectrique à basse fréquence est $\epsilon(\omega) = \epsilon_s - i\sigma/(\omega \epsilon_0)$.

qui est la condition de régime quasi-statique, signifiant que la taille δ du circuit doit être très inférieure à la longueur d'onde dans le matériau $\lambda_s = \lambda/\sqrt{\epsilon_s\mu_s}$. Sous cette condition, les équations de Maxwell macroscopiques se simplifient en

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -i\omega \mathbf{B} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}_{\text{libre}} \text{ avec } \mathbf{j}_{\text{libre}} = \sigma \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

L'équation $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B}$ décrit le phénomène d'induction électromagnétique. Dans le cas où le champ \mathbf{E} induit est négligeable devant le champ d'origine électrostatique (résultant par exemple de la polarisation dans un condensateur), elle se simplifie en $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$. Le champ électrique suit alors les mêmes équations qu'en électrostatique.

En régime quasi-statique (ou régime quasi-permanent), on montre, à partir des équations de Maxwell simplifiées ci-dessus, que toute l'électrodynamique peut se formuler en termes de circuits impliquant des inductances, des capacités et des résistances, auxquels on applique les lois de Kirchhoff (loi des noeuds et loi des mailles). Pour une discussion détaillée du régime quasi-statique, voir par exemple [1,2]. Les lois de comportement des trois composants élémentaires utilisés pour modéliser les circuits en régime quasi-statique sont rappelées sur la Fig. 5.1.

5.1.2 Connexions entre circuits

A très basse fréquence (par exemple 50 Hz qui est la fréquence du réseau électrique en France), les circuits ainsi que leurs interconnexions (les câbles du réseau électrique) sont tous en régime quasi-statique ($\lambda \sim 5000$ km). Il n'y a pas de phénomènes de propagation d'ondes électromagnétiques. Par contre, lorsque la fréquence augmente (domaine MHz et GHz), on atteint très vite un régime dans lequel deux circuits (chacun en régime quasi-statique) sont reliés par une connexion dont la longueur n'est plus négligeable, et peut même facilement excéder la longueur d'onde. On passe donc d'une connexion de type fil électrique à une connexion par ligne de transmission, dans laquelle les phénomènes de propagation sont à prendre en compte. Des exemples de lignes de transmission sont donnés sur la Fig. 5.2.

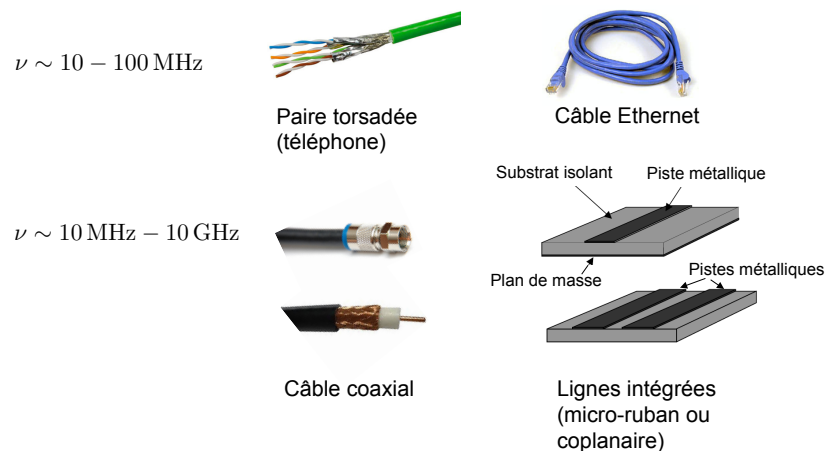


Figure 5.2: Exemples de lignes de transmission.

Notons finalement qu'à plus haute fréquence (domaine micro-ondes, infrarouge et visible), on utilise des guides d'ondes. La propagation dans les guides d'ondes sera étudiée au chapitre 6.

5.2 Modélisation d'une ligne de transmission

5.2.1 Domaine temporel : équation des télégraphistes

Une ligne de transmission générique est formée de deux conducteurs parallèles ou concentriques, séparés par un isolant, comme représentée schématiquement sur la Fig. 5.3 (tous les types de lignes de transmission sont des variations autour de cette géométrie simple). La caractéristique d'une ligne de transmission est qu'elle permet de transporter un signal sur une distance $\ell \gg \lambda$ avec un confinement transverse $\delta \ll \lambda$. Afin de modéliser le comportement électromagnétique de la ligne, on représente chaque élément de longueur dx par un circuit électrique, une portion de conducteur étant représentée par une inductance et une résistance en série, et une portion d'isolant étant représentée par une capacité et une conductance en parallèle, cette dernière modélisant d'éventuels courants de fuite à travers l'isolant.

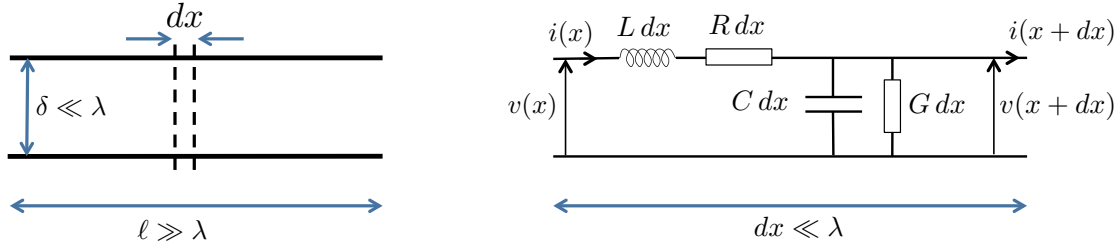


Figure 5.3: Gauche : ligne de transmission formée de deux conducteurs parallèles. Droite : modèle à constantes réparties, dans lequel chaque portion élémentaire dx de la ligne est représentée par un circuit électrique équivalent. Les grandeurs R , L , C et G sont définies par unité de longueur de la ligne.

En raisonnant sur le circuit de droite de la Fig. 5.3, et en utilisant la loi des mailles et la loi des noeuds, on obtient (en se limitant au premier ordre en dx)

$$\begin{aligned} v(x, t) - v(x + dx, t) &= R dx i(x, t) + L dx \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) \\ i(x, t) &= i(x + dx, t) + G dx v(x, t) + C dx \frac{\partial v}{\partial t}(x, t). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Ces deux équations conduisent à

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial x} &= R i + L \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= G v + C \frac{\partial v}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

En dérivant la première par rapport à x , et la seconde par rapport à t , et en combinant les deux équations résultantes, on obtient

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial v}{\partial t} - RG v = 0 \quad (5.7)$$

qui est l'équation des télégraphistes. La même équation se démontre pour $i(x, t)$.

Cas particulier : ligne idéale sans pertes ($R = 0, G = 0$)

Dans ce cas, l'équation des télégraphistes se simplifie en une équation d'onde de la forme

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (5.8)$$

On a donc propagation d'ondes de tension (et de courant) le long de la ligne, avec une vitesse de phase $1/\sqrt{LC}$.

5.2.2 Régime harmonique

Propagation et atténuation

En régime harmonique, on écrit $v(x, t) = \text{Re}[V(x) \exp(i\omega t)]$ et $i(x, t) = \text{Re}[I(x) \exp(i\omega t)]$, et l'équation des télégraphistes devient pour l'amplitude complexe :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\omega^2 LC V + i\omega(RC + LG) V + RG V \quad (5.9)$$

ce qui s'écrit également

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = ZY V(x) \quad (5.10)$$

où $Z(\omega) = R + i\omega L$ et $Y(\omega) = G + i\omega C$, sont, respectivement, l'impédance par unité de longueur correspondant à R et L en série, et l'admittance par unité de longueur correspondant à C et G en parallèle. L'équation ci-dessus est celle qui correspond au circuit représenté sur la Fig. 5.4. Notons que la même équation est obtenue pour $I(x)$.

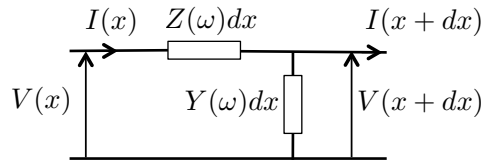


Figure 5.4: Modèle d'une ligne de transmission en régime harmonique. L'impédance par unité de longueur $Z(\omega)$ décrit une résistance et une inductance en série. L'admittance par unité de longueur $Y(\omega)$ décrit une capacité et une conductance en parallèle.

Posons $\gamma^2 = ZY$, afin de réécrire l'Eq. (5.10) sous la forme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \gamma^2 V(x) = 0. \quad (5.11)$$

La solution générale de cette équation s'écrit

$$V(x) = V^+ \exp(-\gamma x) + V^- \exp(\gamma x) \quad (5.12)$$

avec V^\pm qui dépendent des conditions aux limites en bout de ligne. Pour le courant, on a de même

$$I(x) = I^+ \exp(-\gamma x) + I^- \exp(\gamma x). \quad (5.13)$$

Pour interpréter ces solutions, séparons les parties réelles et imaginaires de γ sous la forme $\gamma = \alpha + i\beta$. La solution

$$v(x, t) = \text{Re} [V^+ \exp(-\alpha x) \exp(-i\beta x + i\omega t)] \quad (5.14)$$

correspond à une onde se propageant vers les $x > 0$, et s'atténuant avec une échelle caractéristique $1/\alpha$. La solution

$$v(x, t) = \text{Re} [V^- \exp(\alpha x) \exp(+i\beta x + i\omega t)] \quad (5.15)$$

correspond à une onde se propageant vers les $x < 0$, et s'atténuant avec la même échelle caractéristique.

On appelle α la constante d'atténuation, et β la constante de propagation. Cette dernière décrit la vitesse de phase $v_\phi = \omega/\beta$ des ondes sur la ligne. Pour une ligne sans pertes, $\alpha = 0$ et $\beta = \omega\sqrt{LC}$. On retrouve que la vitesse de phase est $v_\phi = 1/\sqrt{LC}$.

Impédance caractéristique

Les ondes de courant et de tension sont liées, et ne dépendent en fait que de deux constantes fixées par les conditions aux limites. Pour le montrer, en raisonnant sur le circuit de la Fig. 5.4, on établit directement

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -Z I \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -Y V \end{aligned} \quad (5.16)$$

qui sont l'équivalent de (5.6) en régime harmonique. Ces deux équations permettent de relier I^+ et I^- à V^+ et V^- , conduisant à une expression du courant en fonction de V^+ et V^- :

$$I(x) = \frac{1}{Z_0} [V^+ \exp(-\gamma x) - V^- \exp(\gamma x)] \quad (5.17)$$

où

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \quad (5.18)$$

est l'*impédance caractéristique* de la ligne de transmission. Z_0 est dans le cas général une grandeur complexe. Pour une ligne sans pertes, on a simplement $Z_0 = \sqrt{L/C}$.

Ordre de grandeur : pour une ligne coaxiale typique, on a une capacité par unité de longueur $C = 100 \text{ pF.m}^{-1}$ et une inductance par unité de longueur $L = 250 \text{ nH.m}^{-1}$, et donc $Z_0 = 50 \Omega$ (en supposant la ligne sans perte).

5.3 Réflexion et adaptation d'impédance

5.3.1 Facteur de réflexion en bout de ligne

Considérons une ligne de transmission alimentée par un générateur, et fermée par une impédance de charge notée Z_t , comme représenté sur la Fig. 5.5.

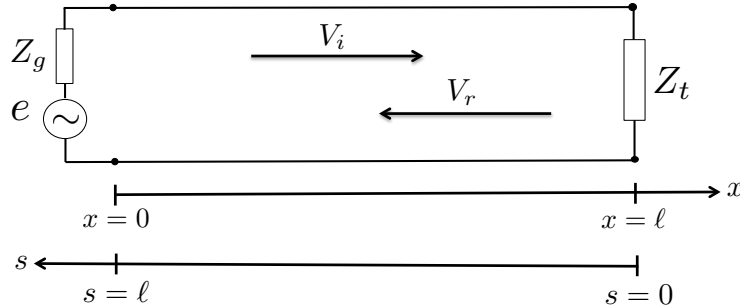


Figure 5.5: Ligne de transmission de longueur ℓ connectant un générateur à une impédance de charge Z_t .

La condition en bout de ligne ($x = \ell$) s'écrit

$$\frac{V(\ell)}{I(\ell)} = Z_t = Z_0 \frac{V^+ \exp(-\gamma\ell) + V^- \exp(\gamma\ell)}{V^+ \exp(-\gamma\ell) - V^- \exp(\gamma\ell)} \quad (5.19)$$

d'où l'on obtient directement

$$\frac{V^-}{V^+} \exp(2\gamma\ell) = \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0}. \quad (5.20)$$

En désignant l'onde se propageant vers les $x > 0$ comme l'onde incidente, et l'onde se propageant vers les $x < 0$ comme l'onde réfléchie, on définit le facteur de réflexion en $x = \ell$ par

$$\Gamma(\ell) = \frac{V^- \exp(\gamma\ell)}{V^+ \exp(-\gamma\ell)} = \frac{V^-}{V^+} \exp(2\gamma\ell). \quad (5.21)$$

De (5.20) on déduit l'expression du facteur de réflexion en bout de ligne :

$$\Gamma(\ell) = \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0}. \quad (5.22)$$

La réflexion est d'autant plus importante que le contraste (ou le désaccord) entre l'impédance caractéristique de la ligne et l'impédance de charge est grand.

Cas particuliers

De l'Eq. (5.22) on peut obtenir le comportement de la ligne de transmission dans des cas limites.

Court circuit : ce cas correspond à $Z_t = 0$. Le facteur de réflexion prend la valeur -1 . On a réflexion totale avec un déphasage de π à la réflexion.

Circuit ouvert : ce cas correspond à $Z_t = \infty$. Le facteur de réflexion prend la valeur 1. On a réflexion totale sans déphasage.

Adaptation d'impédance : ce cas correspond à $Z_t = Z_0$, et le facteur de réflexion s'annule. On n'a alors aucune réflexion en bout de ligne, et toute la puissance véhiculée par l'onde de courant et de tension est transmise à la charge.

5.3.2 Facteur de réflexion local et impédance ramenée

On peut définir un facteur de réflexion local à la position x le long de la ligne, comme

$$\Gamma(x) = \frac{V^- \exp(\gamma x)}{V^+ \exp(-\gamma x)} = \frac{V^-}{V^+} \exp(2\gamma x) \quad (5.23)$$

ainsi qu'une impédance locale

$$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = Z_0 \frac{V^+ \exp(-\gamma x) + V^- \exp(\gamma x)}{V^+ \exp(-\gamma x) - V^- \exp(\gamma x)}. \quad (5.24)$$

Cette impédance $Z(x)$ est appelée *impédance ramenée* en x . Pour un observateur placé avant l'abscisse x , elle correspond à l'impédance équivalente de tout ce qui se trouve au delà de x . Si l'on coupait la ligne en x et qu'on la fermait avec l'impédance $Z(x)$, rien ne changerait pour cet observateur.

La relation entre le facteur de réflexion local $\Gamma(x)$ et l'impédance ramenée $Z(x)$ s'obtient comme dans la section précédente :

$$\Gamma(x) = \frac{Z(x) - Z_0}{Z(x) + Z_0} = \frac{z(x) - 1}{z(x) + 1}. \quad (5.25)$$

Dans la dernière égalité on a introduit l'impédance réduite $z(x) = Z(x)/Z_0$.

5.3.3 Changement de variable

A partir de (5.21) et (5.23) on obtient une relation entre le facteur de réflexion sur la ligne et le facteur de réflexion en bout de ligne :

$$\Gamma(x) = \Gamma(\ell) \exp[2\gamma(x - \ell)]. \quad (5.26)$$

Afin de manipuler des expressions qui ne dépendent pas explicitement de ℓ , on préfère raisonner en utilisant la variable $s = \ell - x$, ce qui revient à prendre l'origine des coordonnées sur la charge (voir Fig. 5.5). On a alors :

$$\Gamma(s) = \Gamma_0 \exp[-2\gamma s] \quad (5.27)$$

où

$$\Gamma_0 = \frac{z_t - 1}{z_t + 1} \quad (5.28)$$

est le facteur de réflexion en bout de ligne ($s = 0$), $z_t = Z_t/Z_0$ étant l'impédance de charge réduite.

On peut alors, comme nous l'avons fait avec la variable x , introduire une impédance ramenée $Z(s)$, et une impédance ramenée réduite $z_s = Z(s)/Z_0$, et trouver la relation entre $\Gamma(s)$ et z_s . En effectuant le changement de variable $s = \ell - x$ sur les expressions générales (5.12) et (5.17) de V et I , on obtient :

$$V(s) = V'^+ \exp(\gamma s) + V'^- \exp(-\gamma s) \quad (5.29)$$

et

$$I(s) = \frac{1}{Z_0} [V'^+ \exp(\gamma s) - V'^- \exp(-\gamma s)] \quad (5.30)$$

où $V'^+ = V^+ \exp(-\gamma \ell)$ et $V'^- = V^- \exp(\gamma \ell)$ sont deux nouvelles constantes qui dépendent de la condition en bout de ligne. En définissant l'impédance ramenée $Z(s)$ par

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \quad (5.31)$$

et en procédant comme précédemment, on obtient la relation

$$\Gamma(s) = \frac{Z(s) - Z_0}{Z(s) + Z_0}. \quad (5.32)$$

On a donc au final

$$\Gamma(s) = \frac{z_s - 1}{z_s + 1} = \frac{z_t - 1}{z_t + 1} \exp[-2\gamma s]. \quad (5.33)$$

5.3.4 Représentation graphique de $\Gamma(s)$

$\Gamma(s)$ est un nombre complexe, que l'on peut écrire sous la forme $\Gamma(s) = \rho_0 \exp(i\theta_0) \exp(-2\gamma s)$. Dans le cas d'une ligne sans pertes, on a $\gamma = i\beta$ et

$$\Gamma(s) = \rho_0 \exp[i(\theta_0 - 2\beta s)].$$

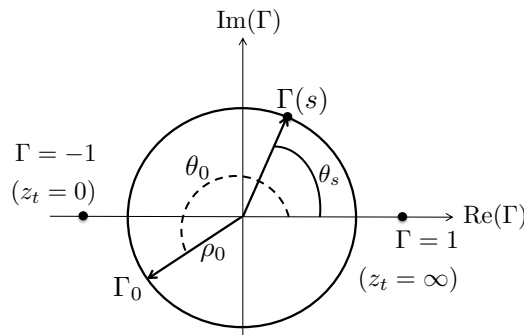


Figure 5.6: Représentation de $\Gamma(s)$ dans le plan complexe. Pour une ligne sans pertes, le point représentatif de $\Gamma(s)$ se déplace sur un cercle dans le sens des aiguilles d'une montre lorsque s augmente (déplacement de la charge vers le générateur).

On peut représenter $\Gamma(s)$ dans le plan complexe, comme sur la Fig. 5.6. Lorsque s augmente (déplacement le long de la ligne en allant de la charge vers le générateur), $\theta_s = \theta_0 - 2\beta s$ diminue. Le point représentatif de $\Gamma(s)$ se déplace donc dans le sens des aiguilles d'une montre. Cette construction est à la base de la méthode d'adaptation d'impédance utilisant l'abaque de Smith qui sera utilisée en TP. D'autres méthodes d'adaptation d'impédance seront illustrées en TD.

Références

- [1] L. Landau et E. Lifschitz, *Electrodynamique des Milieux Continus* (Mir, Moscou, 1969) ; L. D. Landau, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, *Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon Press, Oxford, 1984).
- [2] A. Zangwill, *Modern Electrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013).
- [3] D.M. Pozar, *Microwave Engineering*, 4th Edition (Wiley, 2012).

Chapitre 6

Ondes guidées

Objectifs

- Introduire les notions de modes et de fréquence de coupure sur l'exemple simple du guide métallique plan.
- Présenter les méthodes générales permettant de décrire les modes guidés dans les guides métalliques et diélectriques.
- Discuter le transport de l'énergie et l'atténuation dans les guides d'onde.

6.1 Introduction

Connecter entre eux des circuits ou des composants est un problème clé dans les systèmes électromagnétiques. Lorsque la fréquence augmente, le fil électrique est remplacé par une ligne de transmission, puis par un guide d'onde métallique ou diélectrique. La raison principale est qu'un simple fil devient une antenne dont les pertes par rayonnement ne peuvent plus être négligées à haute fréquence (voir chapitres 8 et 9). De plus, la propagation en espace libre est caractérisée par une puissance par unité de surface s'atténuant en $1/r^2$, où r est la distance à la source, et est de plus très sensible aux perturbations dans l'environnement. Les systèmes de guidage permettent une transmission robuste (protégée) sur de grandes distances (pensons par exemple à la fibre optique très utilisées en télécommunications). La Fig. 6.1 présente schématiquement les structures guidantes électromagnétiques utilisées dans différentes gammes de fréquence.

Notons enfin que le concept d'onde guidée est très général, et concerne tous les types d'ondes. Un tuyau sonore guide les ondes acoustiques (par exemple le couloir du métro guide le son d'un musicien placé à plusieurs dizaines de mètres). Dans l'eau de mer, les ondes acoustiques peuvent être guidées le long d'un minimum de densité (qui correspond à un maximum de l'indice de réfraction pour ces ondes) apparaissant entre une zone de plus forte salinité au voisinage de la surface, et une zone de densité croissante lorsque la profondeur augmente. Quant aux ondes radiofréquences, elles sont bloquées après une certaine distance dans un tunnel (contrairement aux ondes de plus hautes fréquences), ce qui est également une caractéristique du guidage et de la notion de fréquence de coupure, comme nous allons le voir un peu plus loin dans ce chapitre.

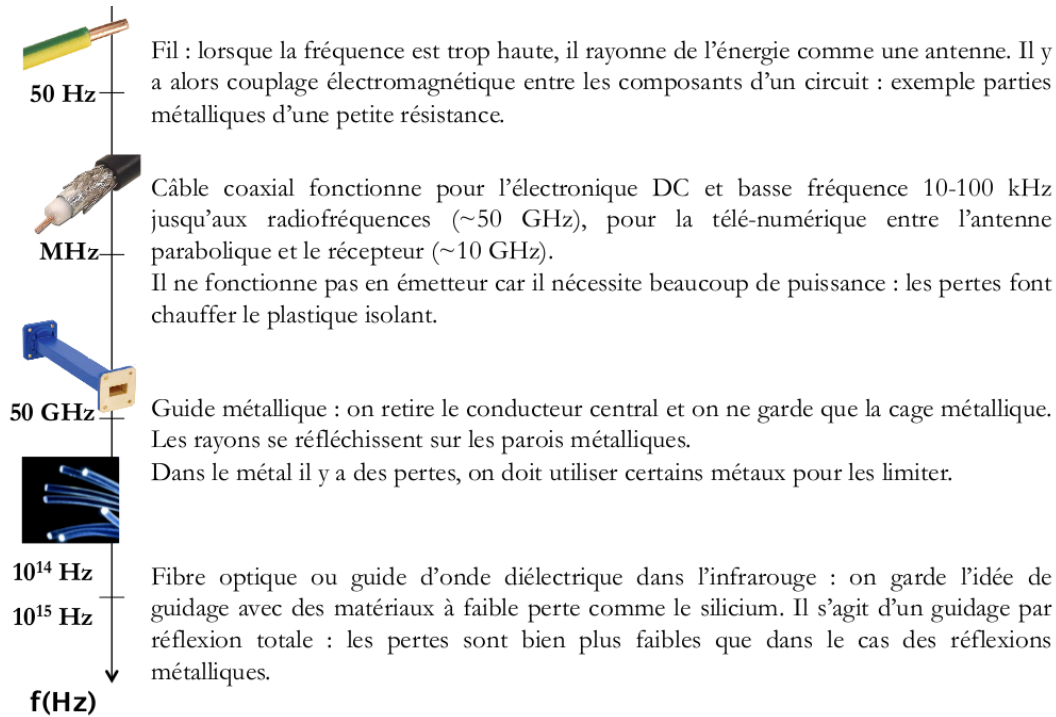


Figure 6.1: Structures de guidage des ondes électromagnétiques dans différents domaines de fréquence.

6.2 Guide métallique à plaques parallèles

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au cas particulier du guide métallique plan, dont la géométrie est représentée sur la Fig. 6.2.

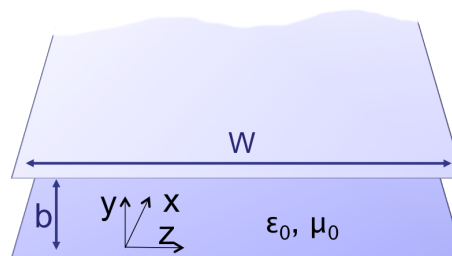


Figure 6.2: Géométrie du guide d'onde métallique plan à plaques parallèles. On suppose que les plaques sont d'étendue infinie dans la direction Ox , et que $W \gg b$ dans la direction de propagation. Le milieu entre les plaque est assimilé au vide.

Considérant que les plaques métalliques se comportent comme des conducteurs parfaits, les conditions aux limites sur les parois du guide s'écrivent

$$\mathbf{E}_{tg}(y = \pm b/2) = 0, \quad (6.1)$$

du fait de la continuité de la composante tangentielle du champ électrique \mathbf{E}_{tg} . Dans cette section, nous allons étudier une solution particulière, sans chercher à traiter le problème dans sa

généralité. La méthode générale d'étude des guides d'onde sera exposée dans la section suivante. Nous considérons donc une onde monochromatique transverse électrique (TE) guidée dans la direction Oz , d'amplitude complexe

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_x \cos(\alpha y) \exp(ikz), \quad (6.2)$$

où \mathbf{e}_x est le vecteur unitaire de l'axe Ox . L'équation de Helmholtz $\Delta \mathbf{E} + (\omega^2/c^2) \mathbf{E} = 0$ doit être vérifiée, ce qui implique que

$$-\alpha^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \text{ et donc } k = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 \right)^{1/2}. \quad (6.3)$$

De plus, les conditions aux limites (6.1) imposent

$$\cos\left(\alpha \frac{b}{2}\right) = 0 \text{ soit } \alpha = (2m + 1) \frac{\pi}{b}, \quad (6.4)$$

où m est un entier.

Cet exemple simple permet de discuter quelques propriétés fondamentales des ondes guidées.

Discrétisation (ou quantification)

On remarque que le confinement du champ selon la direction transverse Oy crée une contrainte sur α et k : seules des valeurs discrètes, quantifiées par le nombre entier m , sont autorisées. C'est une caractéristique que l'on retrouve pour tout type d'onde.

Notion de modes

A chaque entier m correspond un mode de propagation (un mode guidé), c'est-à-dire une forme spatiale du champ électrique avec $\alpha_m = (2m + 1)\pi/b$ et $k_m = (\omega^2/c^2 - \alpha_m^2)^{1/2}$. Le profil transverse des modes $m = 0$ et $m = 1$ est représenté sur la Fig. 6.3.

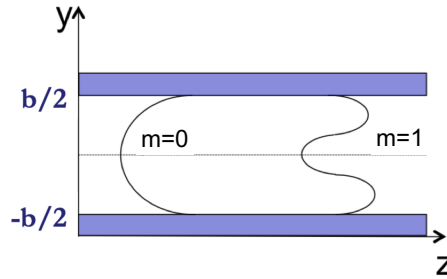


Figure 6.3: Modes TE dans le guide d'onde métallique plan.

Dispersion

Chaque mode possède sa propre vitesse de phase, définie par $v_p = \omega/k_m$. Le guide d'onde est donc dispersif (on parle de dispersion intermodale).

Fréquence de coupure. Guide monomode et multimode

A une fréquence ω donnée, le nombre de modes autorisés correspond aux valeurs de l'entier m telles que k_m soit réel. Lorsqu'un seul mode ne peut se propager, le guide est dit monomode.

Il existe une fréquence $\omega_c = \pi c/b$ au-dessous de laquelle k_m est imaginaire pur pour toute valeur de m . Aucun mode ne peut alors se propager entre les plaques. ω_c est appelée fréquence

de coupure. En utilisant la longueur d'onde $\lambda = 2\pi c/\omega$, la condition $\omega < \omega_c$ devient $\lambda > 2b$. Autrement dit, aucune propagation n'est possible dans le guide si $b < \lambda/2$. On notera également que le guide est monomode pour $b \simeq \lambda$.

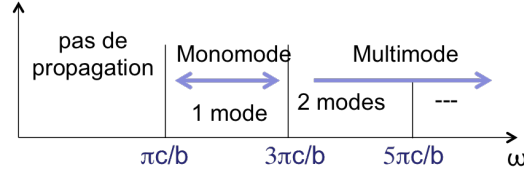


Figure 6.4: Régimes de propagation monomode/multimode en fonction de la fréquence ω .

Interprétation de la propagation guidée

Une autre façon de comprendre la propagation guidée est de l'envisager en terme d'ondes planes effectuant des réflexions multiples sur les parois métalliques. En effet, l'amplitude complexe \mathbf{E} de l'Eq. (6.2) peut se réécrire sous la forme

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{2} \mathbf{e}_x [\exp(i\alpha y) + \exp(-i\alpha y)] \exp(ikz), \quad (6.5)$$

ce qui correspond à deux ondes planes se propageant avec un angle $\pm\theta$ par rapport à l'axe Oz , où $\alpha = (\omega/c) \sin\theta$, comme indiqué sur la Fig. 6.5.

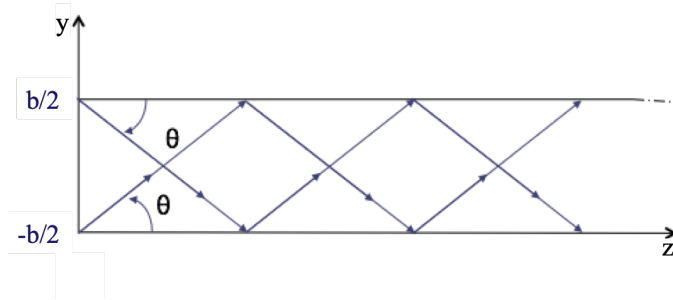


Figure 6.5: Mode de propagation dans le guide d'onde à plaques parallèles, vu comme la superposition de deux ondes planes effectuant des réflexions multiples sur les parois métalliques.

Le mode $p = 0$ correspond à $\pi/b = (\omega/c) \sin\theta$. La propagation est possible pour $\theta \leq \pi/2$. L'angle critique $\theta_c = \pi/2$ correspond à $\omega_c = \pi c/b$. On retrouve la fréquence de coupure, en dessous de laquelle il n'est pas possible de construire un mode par interférence entre deux ondes planes comme sur la Fig. 6.5.

6.3 Méthode générale pour les guides métalliques

Nous allons maintenant introduire une méthode générale pour l'analyse de la propagation dans les guides d'onde métalliques. Nous considérons des structures cylindriques telles que celles

représentées sur la Fig. 6.6, avec une direction de guidage suivant l'axe Oz . Le guide est formé d'un coeur vide ou contenant un matériau de permittivité et perméabilité relatives $\epsilon_r(\omega)$ et $\mu_r(\omega)$, entouré d'une couche conductrice (métal).

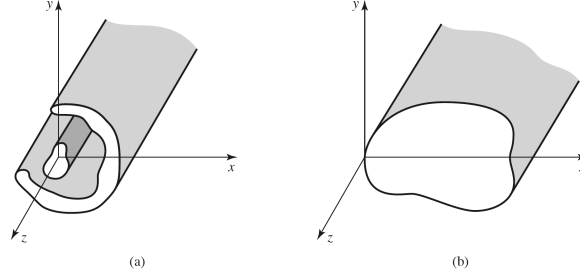


Figure 6.6: Différentes structures de guidage : a) à deux conducteurs (type ligne de transmission), b) guide d'onde métallique creux étudiés dans ce chapitre.

6.3.1 Décomposition des champs

Nous considérons des ondes monochromatiques, avec une dépendance temporelle en $\exp(-i\omega t)$. Nous définissons les composantes longitudinales et transverses des champs par rapport à l'axe Oz , en écrivant les amplitudes complexes sous la forme

$$\mathbf{E}(x, y, z) = [\mathbf{E}_T(x, y) + E_z(x, y)\mathbf{u}_z] \exp(ikz) \quad (6.6)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = [\mathbf{H}_T(x, y) + H_z(x, y)\mathbf{u}_z] \exp(ikz), \quad (6.7)$$

\mathbf{u}_z étant le vecteur unitaire le long de l'axe Oz . Cette forme de solutions correspond à des ondes guidées le long de l'axe Oz . Ici le vecteur d'onde k peut être complexe. Nous allons voir que les parties transverses s'expriment en fonction des parties longitudinales, ce qui simplifie considérablement le problème.

Expression générale des composantes transverses

Les équations de Maxwell à l'intérieur du cylindre, en régime monochromatique, s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega \mathbf{B} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\omega \mathbf{D}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

ou encore, en utilisant l'opérateur ∇ ,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 & \nabla \wedge \mathbf{E} &= i\omega \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \wedge \mathbf{H} &= -i\omega \mathbf{D}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

avec $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$.

En séparant les contributions transverses et longitudinales, on a

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = [\nabla_T \wedge \mathbf{E}_T + ik\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{E}_T - \mathbf{u}_z \wedge \nabla_T E_z] \exp(ikz) \quad (6.10)$$

et de même pour $\nabla \wedge \mathbf{H}$. Ici l'opérateur ∇_T ne porte que sur les variables x et y . On remarque que dans cette décomposition, le premier terme entre crochets est dirigé selon \mathbf{u}_z , et les deux autres termes sont transverses par rapport à \mathbf{u}_z . En substituant ces expressions dans les équations de Maxwell (6.9), on obtient

$$\nabla_T \wedge \mathbf{E}_T = i\omega\mu_0 \mu_r H_z \mathbf{u}_z \quad (6.11)$$

$$i\omega\mu_0 \mu_r \mathbf{H}_T - ik\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{E}_T = -\mathbf{u}_z \wedge \nabla_T E_z \quad (6.12)$$

et

$$\nabla_T \wedge \mathbf{H}_T = -i\omega\epsilon_0 \epsilon_r E_z \mathbf{u}_z \quad (6.13)$$

$$i\omega\epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}_T + ik\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{H}_T = \mathbf{u}_z \wedge \nabla_T H_z. \quad (6.14)$$

Les Eqs. (6.11)-(6.14) permettent de déterminer les composantes transverses des champs \mathbf{E}_T et \mathbf{H}_T à partir de la donnée de E_z et H_z . Afin d'exprimer \mathbf{H}_T explicitement, on peut effectuer le produit vectoriel $\mathbf{u}_z \wedge$ (6.14), et substituer l'expression de $\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{E}_T$ dans l'Eq. (6.12). On obtient alors

$$\mathbf{H}_T = \frac{ik}{\gamma^2} \nabla_T H_z + \frac{i\omega\epsilon_0 \epsilon_r}{\gamma^2} \mathbf{u}_z \wedge \nabla_T E_z, \quad (6.15)$$

où γ^2 est défini par

$$\gamma^2 = \epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = n^2(\omega) k_0^2 - k^2, \quad (6.16)$$

avec $k_0 = \omega/c$ et $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ l'indice de réfraction du guide d'onde.

De même en effectuant $\mathbf{u}_z \wedge$ (6.15), et en substituant $\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{H}_T$ dans l'Eq. (6.14), on obtient

$$\mathbf{E}_T = \frac{ik}{\gamma^2} \nabla_T E_z - \frac{i\omega\mu_0 \mu_r}{\gamma^2} \mathbf{u}_z \wedge \nabla_T H_z. \quad (6.17)$$

On retiendra donc que l'on peut déterminer les composantes transverses des champs à partir des composantes longitudinales. On classe alors les solutions possibles en quatre familles :

- Modes transverses électriques (TE) : $E_z = 0$;
- Modes transverses magnétiques (TM) : $H_z = 0$;
- Modes transverses électromagnétiques (TEM) : $E_z = 0$ et $H_z = 0$;
- Modes hybrides : $E_z \neq 0$ et $H_z \neq 0$.

Equation vérifiée par les composantes longitudinales

Il est possible d'isoler E_z en effectuant $\nabla_T \wedge$ (6.15), et en utilisant l'Eq. (6.13) pour éliminer $\nabla_T \wedge \mathbf{H}_T$. De même, en effectuant $\nabla_T \wedge$ (6.17) et en utilisant l'Eq. (6.11), il est possible d'éliminer $\nabla_T \wedge \mathbf{E}_T$ pour isoler H_z . De plus, en utilisant le fait que H_z et E_z ne dépendent pas de z , on montre facilement que les composantes longitudinales des champs obéissent à l'équation

$$(\nabla_T^2 + \gamma^2) \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0. \quad (6.18)$$

On notera qu'il s'agit de l'équation de Helmholtz 2D puisque les champs ne dépendent que de x et y , et que l'opérateur Laplacien transverse est défini comme $\nabla_T^2 = \nabla^2 - (\partial^2/\partial z^2)$.

6.3.2 Modes transverses électriques

Dans le cas TE, on a $E_z = 0$, et les équations permettant de déterminer les champs \mathbf{E}_T et \mathbf{H}_T sont

$$\mathbf{H}_T = \frac{ik}{\gamma^2} \nabla_T H_z \quad (6.19)$$

$$\mathbf{E}_T = -\frac{i\omega\mu_0\mu_r}{\gamma^2} \mathbf{u}_z \wedge \nabla_T H_z. \quad (6.20)$$

Les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} complets s'écrivent alors sous la forme

$$\mathbf{E}_{TE} = -\frac{i\omega\mu_0\mu_r}{\gamma^2} (\mathbf{u}_z \wedge \nabla_T H_z) \exp(ikz) \quad (6.21)$$

$$\mathbf{H}_{TE} = \left(\frac{ik}{\gamma^2} \nabla_T H_z + H_z \mathbf{u}_z \right) \exp(ikz). \quad (6.22)$$

Afin de déterminer H_z , il faut résoudre

$$(\nabla_T^2 + \gamma^2)H_z = 0, \quad (6.23)$$

avec les conditions aux limites à l'interface diélectrique-métal. Pour les modes TE, la condition aux limites découle de la continuité de la composante normale de \mathbf{B} aux interfaces, et s'écrit $\partial H_z / \partial n = 0$ sur les parois métalliques, où $\partial / \partial n = \mathbf{n} \cdot \nabla$ désigne la dérivée le long de la normale à l'interface¹. L'application de cette méthode générale au calcul des modes TE d'un guide métallique rectangulaire sera vue en TD.

La notion de modes discrets émerge directement de la résolution de l'équation ci-dessus, qui une fois les conditions aux limites fixées, s'analyse comme un problème aux valeurs propres. En effet, comme pour l'équation de Schrödinger en mécanique quantique, le fait de confiner les ondes en x et y dans le guide génère fait que l'équation aux valeurs propres $\nabla_T^2 H_z(x, y) = -\gamma^2 H_z(x, y)$ n'a de solutions que pour des valeurs propres discrètes, et donc des valeurs de γ notées γ_m , avec m entier. Pour chaque valeur de m , la donnée de γ_m et du vecteur propre $H_{z,m}$ définit un mode du guide d'onde.

La démarche s'étend facilement aux modes TM. Notons que si des modes TE, TM et hybrides peuvent se propager dans tous les types de guides d'onde, le mode TEM nécessite la présence de deux conducteurs, comme sur le schéma de gauche de la figure 6.6 (cas d'un ligne coaxiale par exemple). On admettra cette propriété sans démonstration (voir par exemple [2], page 677).

6.3.3 Dispersion et fréquence de coupure

En l'absence de dispersion intrinsèque du matériau au coeur du guide, la relation de dispersion (6.16) pour le mode m s'écrit

$$\gamma_m^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} - k_m^2, \quad (6.24)$$

¹Pour les modes TM, la condition aux limites découle de la continuité de \mathbf{E}_{tg} , et est simplement $E_z = 0$ sur les parois métalliques.

l'indice de réfraction n étant indépendant de la fréquence. Ici nous supposons la fréquence ω donnée, et la valeur de γ_m impose donc la valeur du vecteur d'onde k_m . On peut également raisonner en fixant k , et la valeur γ_m fixe alors une fréquence ω_m à laquelle le mode m peut se propager (cette seconde vision est celle utilisée dans le cas des cavités résonantes, étudiées au chapitre suivant).

Le mode m est propagatif si k_m est réel. On peut écrire

$$k_m = \frac{n}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{c,m}^2}, \quad (6.25)$$

où $\omega_{c,m} = c\gamma_m/n$ est la fréquence de coupure du mode m . Pour $\omega < \omega_{c,m}$, le mode est évanescent, pour $\omega > \omega_{c,m}$, il est propagatif.

La vitesse de phase du mode m s'exprime comme

$$v_{p,m} = \frac{\omega}{k_m} = \frac{c}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - (\omega_{c,m}/\omega)^2}}, \quad (6.26)$$

et dépend donc du mode considéré. Le guide d'onde est dispersif. La vitesse de groupe du mode m est donnée par

$$v_{g,m} = \frac{d\omega}{dk_m} = \frac{c}{n} \sqrt{1 - (\omega_{c,m}/\omega)^2} \quad (6.27)$$

et est également dispersive. Si un signal dépendant du temps (et donc composé de plusieurs fréquences) est décomposé sur un mode m , le dépendance en fréquence de $v_{p,m}$ va induire une distorsion du signal (par exemple si le signal est une suite d'impulsions courtes, chaque impulsion va s'élargir et se déformer). Si un signal est décomposé sur plusieurs modes, la dispersion intermodale va également induire un brouillage du fait que $v_{g,m}$ change d'un mode à l'autre (les impulsions vont se décaler les unes par rapport aux autres, induisant un brouillage du signal).

Pour terminer, il est intéressant de noter que le produit des deux vitesses vérifie

$$v_{p,m}v_{g,m} = \frac{c^2}{n^2}. \quad (6.28)$$

6.4 Guide d'onde diélectrique plan

Le recours aux guides d'onde diélectriques est nécessaire lorsque les pertes ohmiques dans le métal deviennent trop importantes. C'est le cas aux fréquences visibles ou proche infrarouge (à la longueur d'onde $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ utilisée en télécommunications optiques). Dans ces systèmes, le guidage se fait par réflexion totale interne à l'interface entre le coeur d'indice n_1 et une gaine d'indice $n_2 < n_1$.

Les guides d'onde diélectriques diffèrent de leur homologue métallique par le fait que les champs ne sont pas entièrement confinés dans le guide (en effet la réflexion totale interne produit en transmission une onde évanescente dans la direction transverse à l'axe du guide, qui "déborde" donc à l'extérieur du coeur), et par le fait que les modes ne sont généralement pas exclusivement TE ou TM.

Un exemple de guide d'onde diélectrique bien connu est la fibre optique schématisée sur la Fig. 6.7. Seules les ondes se propagent avec un angle θ par rapport à l'axe de la fibre inférieur

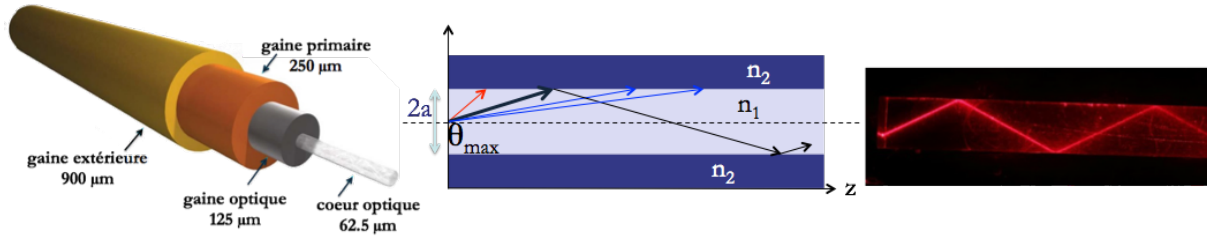


Figure 6.7: Gauche : Schéma d'une fibre optique avec quelques dimensions caractéristiques. Centre : propagation des rayons en coupe dans une fibre avec $n_2 < n_1$ permettant la réflexion totale interne. Droite : illustrations des réflexions internes totales successives.

à $\theta_{max} = \cos^{-1}(n_2/n_1)$ sont réfléchies totalement et donc guidées (ceci se déduit directement de la condition de réflexion totale à l'interface cœur/gaine).

Afin d'éviter la complexité mathématique du traitement de la fibre optique en géométrie cylindrique, nous ne traiterons dans le cadre de ce cours que le cas d'un guide d'onde diélectrique plan à saut d'indice. Cette géométrie permet de saisir les grands principes de la propagation guidée diélectrique.

6.4.1 Hypothèses de travail

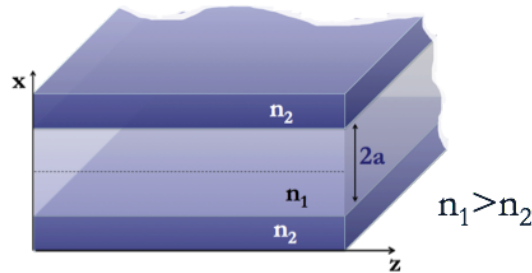


Figure 6.8: Géométrie du guide d'onde diélectrique plan à saut d'indice. Le cœur (milieu d'indice n_1) est confiné entre les plans $x = -a$ et $x = a$.

Dans la géométrie du guide d'onde de la Fig. 6.8, nous étudions un mode TE ($E_z = 0$) se propageant dans la direction Oz , dont l'amplitude complexe est de la forme

$$\mathbf{E}(x, z) = E(x)\mathbf{u}_y \exp(ikz) \quad (6.29)$$

avec \mathbf{u}_y le vecteur unitaire de l'axe Oy . Comme le guide est supposé invariant par translation dans les directions Oy et Oz , l'amplitude est indépendante de y . En substituant cette expression du champ dans l'équation de Helmholtz, on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x) + \gamma^2 E(x) = 0, \quad (6.30)$$

où $\gamma^2 = n^2(\omega^2/c^2) - k^2$, et n est l'indice de réfraction du milieu, qui prend les valeurs n_1 pour $|x| \leq a$ ou n_2 sinon. Afin de résoudre cette équation nous allons utiliser les relations de continuités des champs à l'interface entre les deux milieux. On peut remarquer que la symétrie

du problème par rapport au plan $x = 0$ permet d'envisager deux types de solutions, les solutions paires ($E(-x) = E(x)$) et les solutions impaires ($E(-x) = -E(x)$). Enfin notons que l'expression du champ magnétique se déduit des équations de Maxwell (en supposant les milieux non magnétiques et donc $\mu_r = 1$) :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{E} = \frac{1}{i\omega\mu_0} [-ik\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial x}] E(x) \exp(ikz). \quad (6.31)$$

6.4.2 Modes guidés

Un mode guidé est défini comme une solution de l'Eq. (6.30) avec $\gamma^2 > 0$ pour $|x| \leq a$ (qui donnera une onde stationnaire selon Ox dans le milieu 1) et $\gamma^2 < 0$ pour $|x| > a$ (qui donnera une onde exponentiellement décroissante selon Ox dans le milieu 2). Ceci correspond aux conditions de réflexion totale interne aux interfaces $x = \pm a$ (voir chapitre 4, section 4.4.4).

Afin d'écrire les relations de continuités aux interfaces, nous aurons besoin des composantes tangentielles de \mathbf{E} et \mathbf{H} , et donc de E_y et H_z dans les milieux 1 et 2. En définissant

$$\gamma_1 = \sqrt{n_1^2 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \quad (6.32)$$

$$\gamma_2 = \sqrt{k^2 - n_2^2 \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad (6.33)$$

les champs solutions de (6.30) vérifiant les conditions d'ondes guidées sont de la forme

$$E_{1y}(x) = E_1 \left\{ \begin{array}{l} \sin(\gamma_1 x) \\ \cos(\gamma_1 x) \end{array} \right\} \quad (6.34)$$

$$H_{1z}(x) = \frac{\gamma_1 E_1}{i\omega\mu_0} \left\{ \begin{array}{l} \cos(\gamma_1 x) \\ -\sin(\gamma_1 x) \end{array} \right\} \quad (6.35)$$

et

$$E_{2y}(x) = E_2 \exp(-\gamma_2 |x|) \quad (6.36)$$

$$H_{2z}(x) = -\text{sign}(x) \frac{\gamma_2 E_2}{i\omega\mu_0} \exp(-\gamma_2 |x|). \quad (6.37)$$

Afin de déterminer γ_1 et γ_2 , on utilise la continuité en $x = \pm a$ des composantes E_y et H_z .

Pour les solutions impaires, les relations de continuité sont

$$E_1 \sin(\gamma_1 a) = E_2 e^{-\gamma_2 a} \quad (6.38)$$

$$\frac{\gamma_1}{\mu_0} E_1 \cos(\gamma_1 a) = -\frac{\gamma_2}{\mu_0} E_2 e^{-\gamma_2 a}, \quad (6.39)$$

dont le rapport conduit à

$$\cot(\gamma_1 a) = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \quad (\text{solutions impaires}). \quad (6.40)$$

En procédant de même pour les solutions paires, on obtient

$$\tan(\gamma_1 a) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \quad (\text{solutions paires}). \quad (6.41)$$

6.4.3 Résolution graphique

Posons $u = \gamma_1 a$ et $v = \gamma_2 a$. Des Eqs. (6.32) et (6.33), on obtient directement que $u^2 + v^2 = (n_1^2 - n_2^2)(\omega^2/c^2)a^2$. Nous sommes donc ramenés à la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} v = u \tan u \text{ (solutions paires) ou } v = -u \cot u \text{ (solutions impaires)} \\ u^2 + v^2 = R^2 \end{cases}$$

avec $R^2 = (n_1^2 - n_2^2)(\omega^2/c^2)a^2$. En référence à la Fig. 6.9, considérant u et v comme les coordonnées cartésiennes dans un plan, les solutions de ce système correspondent à l'intersection du cercle de rayon R avec la courbe $v = u \tan u$ (courbe noire, solutions paires) ou avec la courbe $v = -u \cot u$ (courbe bleue, modes impairs). L'ensemble discret des points solutions définit l'ensemble des modes du guide diélectrique plan.

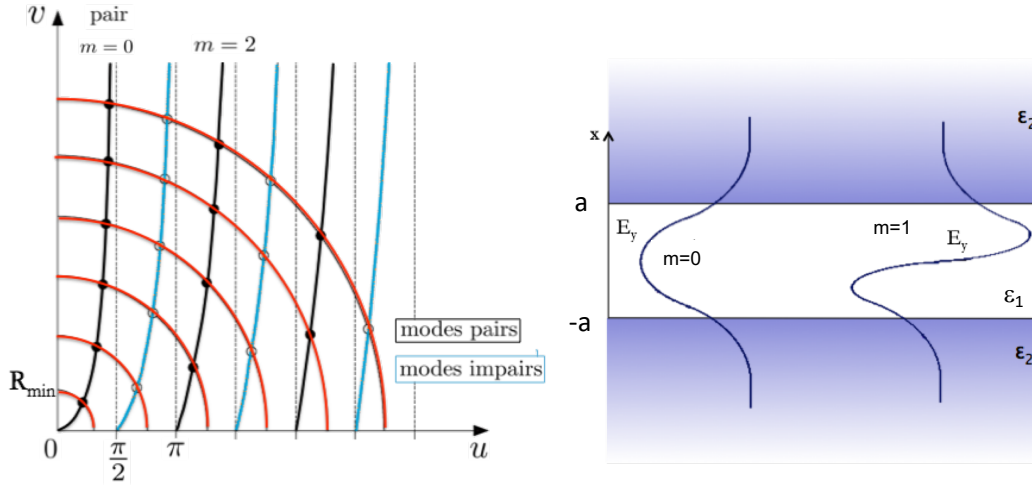


Figure 6.9: Gauche : solutions graphiques des modes pairs et impairs se propageant dans un guide d'onde diélectrique plan. Les modes pairs (impairs) sont définis par les intersections des courbes noires (bleues) avec les cercles rouges. Droite : allure des deux premiers modes TE.

Le rayon R peut se réécrire sous la forme $R = (\omega/c)aN_A = (2\pi/\lambda)aN_A$, où $N_A = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ est appelée ouverture numérique du plan (ou de la fibre optique en géométrie cylindrique). La “fréquence réduite” R contient toutes les informations caractéristiques du guide (indices de réfraction, épaisseur du cœur).

On remarque que pour $0 \leq R \leq \pi/2$, il existe une solution unique. Dans ce régime, le guide est monomode. Notons qu'il existe toujours au moins un mode guidé transverse électrique dans un guide d'onde diélectrique.

Pour chaque valeur de R , on peut déterminer le nombre de modes pairs et impairs guidés dans la structure. Le mode $m + 1$ cesse d'exister au-dessous de la fréquence de coupure ω_m extraite de la relation suivante $R_m = m\pi/2 = (\omega_m/c)aN_A$. La fréquence de coupure du mode $m + 1$ est donc

$$\omega_m = \frac{m\pi c}{2aN_A}.$$

6.4.4 Discussion

Le traitement du modèle simple de guide plan a permis d'introduire les grands principes utiles dans de nombreuses applications. Suivant les besoins requis, la distance a (le diamètre dans le cas d'une fibre optique) permet de contrôler le nombre de modes. A l'heure actuelle, pour les télécommunications optiques, on utilise des fibres monomodes pour éviter les brouillages dus la dispersion (et le mélange de modes résultat des imperfections de la fibre). Pour l'imagerie (par exemple endoscopique) et les télécommunications futures, des fibres multimodes sont à l'étude, couplées à des techniques de contrôle de front d'onde permettant de compenser la dispersion et le mélange de modes.

Une autre application importante est la photonique intégrée sur circuit. Aujourd'hui, en recherche fondamentale ou appliquée, le guidage de la lumière se fait sur directement sur des puces, dans lesquelles les guides d'onde sont intégrés dans les substrats de silicium, comme illustré sur la Fig. 6.10. Cette intégration de la photonique sur circuit, qui a commencé dans les années 1960, a permis d'inclure différents composants actifs et passifs sur une même puce, s'affranchissant notamment des difficultés expérimentales sous-jacentes aux systèmes optiques complexes à composants séparés (alignement des différents éléments optiques, encombrement...). La photonique intégrée devrait également permettre de dépasser certaines limites de l'électronique, liées notamment aux échauffements par effet Joule. Le domaine de la nanophotonique se développe dans cette direction, avec à court terme la perspective de composants hybrides couplant optique et électronique sur circuit.

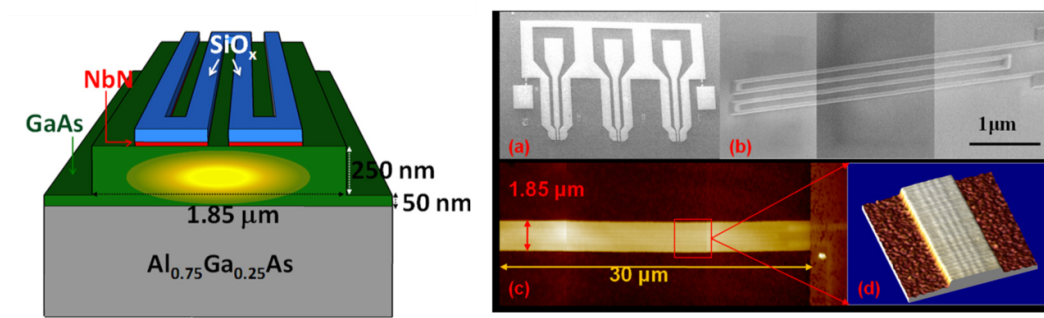


Figure 6.10: Gauche : Schéma d'un guide d'onde diélectrique sur puce de silicium. Droite : Réalisation pratique, images prises au microscope électronique et au microscope à force atomique [4].

6.5 Propagation et atténuation de l'énergie

6.5.1 Vitesse de transport

La puissance P transportée dans le guide est définie comme le flux d'énergie à travers une section transverse du guide. En notant $\mathbf{\Pi}_z = (1/2)\text{Re}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*)$ la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting, on a

$$P = \int_S \mathbf{\Pi}_z \cdot \mathbf{u}_z dS, \quad (6.42)$$

où S désigne la section transverse du guide. On peut montrer, sans difficulté, que

$$\mathbf{\Pi}_z \cdot \mathbf{u}_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}_T \wedge \mathbf{H}_T^*) \cdot \mathbf{u}_z, \quad (6.43)$$

et que donc seules les composantes transverses des champs interviennent dans le calcul de la puissance transportée.

Dans le cas d'un guide formé de matériaux non dispersifs et non absorbants, la densité volumique d'énergie stockée dans le guide, en valeur moyenne temporelle, s'exprime sous la forme

$$u = \frac{1}{4} \epsilon_0 \epsilon_r |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{4} \mu_0 \mu_r |\mathbf{H}|^2. \quad (6.44)$$

Cette expression peut se déduire directement du bilan d'énergie (2.63) (en effectuant une moyenne temporelle). En intégrant la densité d'énergie sur une section S du guide, on définit l'énergie stockée par unité de longueur du guide

$$U = \int_S u \, dS. \quad (6.45)$$

Le rapport

$$v_E = \frac{P}{U} \quad (6.46)$$

définit la vitesse de transport de l'énergie v_E .

Examinons le cas particulier d'un mode TE dans un guide métallique parfait (parois parfaitement conductrices). En utilisant les Eqs. (6.21), (6.22) et (6.42), la puissance transportée par un mode TE s'écrit

$$P_{TE} = \frac{\omega \mu_0 \mu_r}{2k} \int_S |\mathbf{H}_T|^2 \, dS = \frac{\omega \mu_0 \mu_r k}{2\gamma^4} \int_S |\nabla_T H_z|^2 \, dS. \quad (6.47)$$

L'intégrale peut se simplifier en utilisant l'identité $\nabla_T \cdot (H_z^* \nabla_T H_z) = H_z^* \nabla_T^2 H_z + \nabla_T H_z^* \nabla_T H_z$, qui permet d'écrire

$$\int_S |\nabla_T H_z|^2 \, dS = \int_S \nabla_T \cdot (H_z^* \nabla_T H_z) \, dS - \int_S H_z^* \nabla_T^2 H_z \, dS. \quad (6.48)$$

La première intégrale du membre de droite s'annule (on peut montrer qu'elle s'écrit comme la circulation de $H_z^* \partial H_z / \partial n$ sur le bord de la section du guide, qui s'annule sur la paroi métallique du fait de la condition aux limites pour les modes TE). Le second terme se simplifie en utilisant l'Eq. (6.18). On a donc finalement

$$P_{TE} = \frac{\omega \mu_0 \mu_r k}{2\gamma^2} \int_S |H_z|^2 \, dS. \quad (6.49)$$

De même, à partir des Eqs. (6.44) et (6.45), on peut montrer que

$$U_{TE} = \frac{\omega^2 (\mu_0 \mu_r)^2 \epsilon_0 \epsilon_r}{2\gamma^2} \int_S |H_z|^2 \, dS. \quad (6.50)$$

Du rapport P_{TE}/U_{TE} , on déduit directement l'expression de la vitesse de transport de l'énergie

$$v_E = \frac{c^2}{n^2 v_p} = v_g, \quad (6.51)$$

où v_p et v_g sont les vitesses de phase et de groupe du mode, liées par la relation (6.28). La vitesse de l'énergie véhiculée par un mode est donc la vitesse de groupe. Ce résultat, obtenu ici dans la cas particulier d'un mode TE du guide métallique, est en fait un résultat général, valable pour tout type de mode guidé.

6.5.2 Atténuation

Dans le cas des guides d'onde métalliques réels, les pertes par effet Joule dans les parois ne sont pas négligeables. Qualitativement, elles sont dues au courant induit dans le métal, sur une profondeur définie par l'épaisseur de peau δ , donnée par l'Eq. (2.54) à basse fréquence. Aux fréquences plus élevées (au-delà du domaine micro-onde), les pertes dans le métal deviennent trop importantes, et on utilise des guides diélectriques. La propagation est alors uniquement limitée par les pertes par absorption dans le diélectrique, et par les pertes par diffusion dues aux imperfections. Par exemple, dans les fibres optiques, les fluctuations de densité résiduelles de la silice induisent de la diffusion (de la lumière est diffusée hors du guide d'onde, et donc perdue pour le mode guidé).

En présence de pertes, le vecteur d'onde k caractérisant le mode guidé devient complexe. En notant $\text{Im}(k) = \alpha$, l'amplitude du mode m s'atténue comme $\exp(-\alpha z)$. En terme de puissance transportée, on a donc

$$P(z) = P(0) \exp(-2\alpha z). \quad (6.52)$$

Autrement dit, le coefficient d'atténuation du mode m s'exprime comme

$$\alpha = \frac{-1}{2P} \frac{dP}{dz}. \quad (6.53)$$

Pour donner quelques ordres de grandeur, aux fréquences de quelques GHz on utilise des guides métalliques rectangulaires ou circulaires qui peuvent transférer des puissances allant jusqu'au MW, avec une atténuation $\alpha \simeq 4$ dB/100 m à 5 GHz. Aux fréquences visibles et proches infrarouges, une fibre optique permet de transmettre une puissance de l'ordre du mW, avec de très faibles pertes et une atténuation $\alpha \simeq 0.2$ dB/km. Ce minimum d'atténuation est obtenu dans les fibres en silice à la longueur d'onde $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$, qui est la longueur d'onde utilisée dans toutes les télécommunications optiques. Notons que même avec cette faible atténuation, transporter l'information par fibre optique sur longue distance nécessite de réamplifier périodiquement le signal (tous les 100 km environ).

Références

- [1] J.D. Jackson, *Electrodynamique Classique* (Dunod, Paris, 2001), chap. 8.
- [2] A. Zangwill, *Modern Electrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013), chap. 19.
- [3] D.M. Pozar, *Microwave Engineering*, 4th Edition (Wiley, 2012), chap. 3.
- [4] R. Feynman, *Cours de Physique, Electromagnétisme 2*, chap. 23.

Chapitre 7

Cavités résonantes

Objectifs

- Introduire la notion de modes d'une cavité résonante.
- Caractériser les résonances (forme spectrale et facteur de qualité).

Un volume fermé utilisé pour piéger et stocker l'énergie d'une onde électromagnétique est appelé cavité résonante. Les conditions aux limites imposées par les parois contraignent les solutions de l'équation de Helmholtz, qui ne peuvent exister que pour certaines fréquences discrètes correspondant aux résonances de la cavité. La cavité la plus simple, confinant le champ dans une direction de l'espace, est formée de deux plans parfaitement conducteurs séparés d'une distance L . Les modes dans ce cas sont des solutions TEM, dont les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} s'annulent sur les deux plans, et telles que la propagation sur un aller-retour soit un nombre entier de longueurs d'onde. Seules les longueurs d'onde λ_p vérifiant $p\lambda_p = 2L$, avec p entier, peuvent exister dans la cavité. En termes de fréquences, cette condition s'écrit

$$\omega_p = p \frac{c\pi}{L}. \quad (7.1)$$

Les ω_p sont les fréquences de résonance de la cavité unidimensionnelle.

7.1 Cavité métallique rectangulaire

Considérons la cavité rectangulaire (parallélépipédique) de la Fig. 7.1, formée de parois métalliques que nous supposons parfaitement conductrices. La cavité est remplie d'un matériau d'indice de réfraction n .

Nous pouvons considérer la cavité comme un guide d'onde métallique d'axe Oz , fermé par deux parois en $z = 0$ et $z = L$, ce qui permet d'utiliser les résultats du chapitre 6 sur les ondes guidées. A titre d'exemple, nous allons étudier les modes transverses électriques (TE) par rapport à l'axe Oz . L'expression du champ électrique dans un guide infini selon Oz est donnée par l'Eq. (6.21),

$$\mathbf{E}_{TE} = -\frac{i\omega\mu_0\mu_r}{\gamma^2} [\mathbf{u}_z \wedge \nabla_T H_z] \exp(ikz), \quad (7.2)$$

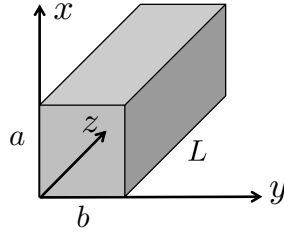


Figure 7.1: Cavité résonante métallique. Les parois sont supposées parfaitement conductrices, et la cavité remplie d'un matériau d'indice de réfraction n .

avec

$$\gamma^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2. \quad (7.3)$$

Dans la cavité fermée, le champ doit satisfaire les conditions supplémentaires

$$\mathbf{E}_{TE} = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } z = L. \quad (7.4)$$

Les modes de la cavité vérifiant ces conditions aux limites s'obtiennent en superposant un mode du guide se propageant dans la direction $+z$ et un mode d'amplitude opposé se propageant dans la direction $-z$, ce qui donne

$$\mathbf{E}_{TE} = \frac{2\omega\mu_0\mu_r}{\gamma^2} [\mathbf{u}_z \wedge \nabla_T H_z] \sin(kz), \quad (7.5)$$

avec la condition $k = p\pi/L$, où p est un entier. Les modes de la cavité sont des ondes stationnaires (la dépendance temporelle et la dépendance spatiale se factorisent lorsqu'on écrit le champ dans le domaine temporel $\mathbf{E}_{TE}(t) = \text{Re}(\mathbf{E}_{TE} \exp(-i\omega t))$). A partir de la relation de dispersion (7.3), on obtient les fréquences des modes de la cavité :

$$\omega_p = \frac{c}{n} \sqrt{\gamma^2 + \frac{p^2\pi^2}{L^2}}. \quad (7.6)$$

Le vecteur d'onde transverse γ est lui déterminé par les conditions aux limites sur les parois latérales du guide d'onde infini (voir chapitre 6). Dans le cas d'un guide rectangulaire (voir l'étude faite en TD), on obtient $\gamma^2 = l^2\pi^2/a^2 + m^2\pi^2/b^2$, avec l et m entiers. Les fréquences de résonance de la cavité rectangulaire de la Fig. 7.1 sont donc données par la relation

$$\omega_{l,m,p} = \frac{c\pi}{n} \sqrt{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{p^2}{L^2}}. \quad (7.7)$$

7.2 Energie stockée et facteur de qualité

Les cavités électromagnétiques possèdent un ensemble discret de fréquences de résonance. A chaque fréquence correspond une configuration spatiale des champs électrique et magnétique (un mode). En pratique, l'existence de pertes d'énergie fait que chaque résonance a une largeur spectrale non nulle. Les pertes peuvent venir de l'absorption dans les parois d'une cavité métallique

ou dans le diélectrique remplissant la cavité, ou de pertes radiatives (l'énergie peut être diffusée hors de la cavité du fait d'imperfections de forme ou de rugosités résiduelles sur les parois).

Considérons un mode de cavité à la fréquence de résonance ω_0 . Imaginons que ce mode soit établi instantanément à $t = 0$, et qu'en l'absence d'excitation extérieure on le laisse évoluer librement. L'évolution temporelle du champ électrique du mode sera de la forme

$$E(t) = \text{Re}[E(0) \exp(-i\omega_0 t)] \exp(-\Gamma t/2) H(t), \quad (7.8)$$

où Γ est le taux de décroissance (en s^{-1}) et $H(t)$ est la fonction échelon de Heaviside. Ici nous négligeons le caractère vectoriel du mode pour simplifier. Le spectre du mode s'obtient par transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) \exp(i\omega t) dt \\ &= \frac{E(0)}{2} \frac{1}{-i(\omega + \omega_0) + \Gamma/2} + \frac{E(0)}{2} \frac{1}{-i(\omega - \omega_0) + \Gamma/2}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

En général la décroissance est lente, et la condition $\Gamma \ll \omega_0$ est vérifiée. Le spectre reste étroit autour de ω_0 et le premier terme est négligeable. L'intensité du mode dans la cavité est donc de la forme

$$|E(\omega)|^2 = \frac{|E(0)|^2}{4(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2}. \quad (7.10)$$

Il s'agit d'un profil Lorentzien, de largeur $\Delta\omega = \Gamma$, dont l'allure est représentée sur la Fig. 7.2.

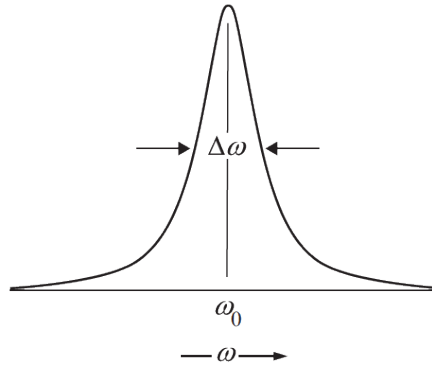


Figure 7.2: Profil Lorentzien, centré en ω_0 et de largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$.

L'énergie W stockée dans la cavité, en moyenne sur un temps long devant $2\pi/\omega_0$, est de la forme

$$W(t) = W(0) \exp(-\Gamma t), \quad (7.11)$$

où $W(0)$ est proportionnelle à $|E(0)|^2$. Γ est donc le taux de décroissance de l'énergie. La quantité $\tau = 1/\Gamma$ est appelée durée de vie du mode. L'énergie stockée obéit à l'équation

$$\frac{dW}{dt} + \Gamma W = 0, \quad (7.12)$$

qui peut également s'écrire

$$\frac{dW}{dt} = -P_{loss}, \quad (7.13)$$

où $P_{loss} = \Gamma W$ est la puissance instantanée perdue par la cavité (par absorption ou diffusion).

Pour caractériser les pertes d'énergie, et la largeur spectrale de la résonance, on utilise le facteur de qualité (nombre sans dimension) défini par

$$Q = \frac{\omega_0}{\Gamma}. \quad (7.14)$$

Plus le facteur de qualité est grand, plus la résonance associée au mode est étroite spectralement. En écrivant $Q = \tau/T_0$, où $T_0 = 2\pi/\omega_0$ est la période des oscillations du champ, on voit que Q mesure le temps de stockage dans la cavité en nombre de cycles d'oscillations du champ.

Aux basses fréquences (jusqu'au domaine micro-onde), on peut utiliser des cavités métalliques, qui permettent d'obtenir des facteurs de qualité de 10^4 . Aux fréquences infrarouges ou visibles, les pertes par absorption dans le métal deviennent trop importantes et le facteur de qualité s'effondre. On a recours à des cavités diélectriques, ou même supraconductrices, illustrées sur la Fig 7.3, qui permettent d'atteindre des facteurs de qualité de l'ordre de $10^5 - 10^6$.

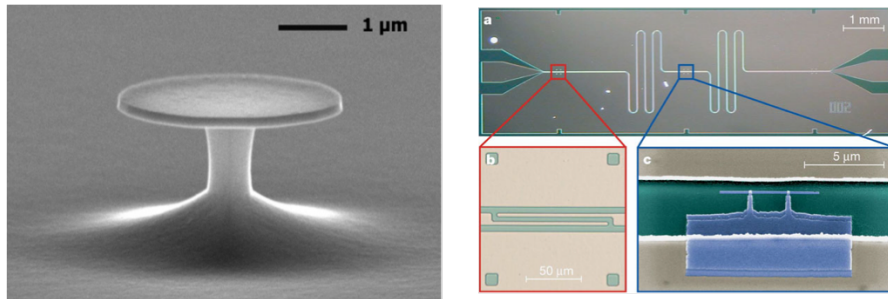


Figure 7.3: Illustration de deux autres types de cavités : à gauche une cavité diélectrique [5] et à droite une cavité supraconductrice [6].

Références

- [1] J.D. Jackson, *Electrodynamique Classique* (Dunod, Paris, 2001).
- [2] A. Zangwill, *Modern Electrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013).
- [3] D.M. Pozar, *Microwave Engineering*, 4th Edition (Wiley, 2012), chapitre 3.
- [4] Sprengers et al, *Waveguide superconducting single-photon detectors for integrated quantum photonic circuits*, Applied Physics Letters 99, 181110 (2011).
- [5] Courtesy of Y. Favero, Laboratoire MPQ, Université Paris Diderot.
- [6] Wallraff et al., *Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics*, Nature 431, 162167 (2004).

Chapitre 8

Rayonnement électromagnétique

Objectifs

- Introduire le formalisme permettant de décrire le rayonnement électromagnétique produit par une distribution de courant connue.
- Présenter l'approximation de champ lointain et l'approximation dipolaire électrique.

8.1 Formulation générale d'un problème de rayonnement

Toute distribution de charge dépendante du temps rayonne un champ électromagnétique. La résolution d'un problème de rayonnement consiste à calculer les champs électrique et magnétique pour une distribution de charges ou de courants donnée. L'utilisation des potentiels vecteur et scalaire comme intermédiaires de calculs permet de simplifier le problème.

8.1.1 Potentiels

Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} & \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (8.1)$$

où $\rho(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ sont les densités de charges et de courants de la source, que l'on suppose connues. La formulation ici s'applique aussi bien aux champs macroscopiques qu'aux champs microscopiques sachant que nous ne calculons que des champs dans le vide (à l'extérieur du volume contenant les sources).

De l'équation $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ on déduit que le champ \mathbf{B} peut s'écrire sous la forme¹ :

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (8.2)$$

¹En effet on a $\operatorname{div}[\operatorname{rot} \mathbf{A}] = 0$ pour tout vecteur \mathbf{A} .

où \mathbf{A} est appelé potentiel vecteur (on dit que \mathbf{B} dérive du potentiel vecteur \mathbf{A}).

De même, de l'équation $\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ on déduit que $\mathbf{rot} (\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t) = 0$, et donc que $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ dérive d'un potentiel scalaire ϕ et s'écrit sous la forme² $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t = -\mathbf{grad} \phi$, le signe $-$ étant conventionnel. On a donc :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (8.3)$$

En travaillant avec les potentiels \mathbf{A} et ϕ , les deux équations de Maxwell sans terme source sont automatiquement satisfaites. En reportant les expressions de \mathbf{E} et \mathbf{B} en fonction de \mathbf{A} et ϕ dans les deux autres équations de Maxwell, on obtient :

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{grad} \left[\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \right] \quad (8.4)$$

$$\Delta \phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} - \text{div} \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \right] \quad (8.5)$$

Ces deux équations générales décrivent la propagation des potentiels vecteur et scalaire.

8.1.2 Choix de jauge

Le potentiel vecteur \mathbf{A} est défini par son rotationnel, et sa divergence est donc indéterminée. Ceci signifie que \mathbf{A} est en fait défini à un terme de la forme $\mathbf{grad} X$ près, où X est un champ scalaire (on rappelle que $\mathbf{rot} \mathbf{grad} X = 0$). Choisir une forme spécifique de $\text{div} \mathbf{A}$ est ce qu'on appelle faire un choix de jauge.

La jauge de Coulomb consiste à choisir $\text{div} \mathbf{A} = 0$ (le potentiel vecteur \mathbf{A} est alors un champ transverse). La jauge de Lorenz, qui est celle que nous utiliserons, découple les équations vérifiées par les deux potentiels \mathbf{A} et ϕ . Elle consiste à imposer :

$$\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (8.6)$$

Remarque : si un couple (\mathbf{A}, ϕ) est solution des Eqs. (8.4) et (8.5), alors le couple $(\mathbf{A} + \mathbf{grad} X, \phi - \partial X / \partial t)$, où X est un champ scalaire quelconque, est également solution. Cette propriété est connue sous le nom d'invariance de jauge.

8.1.3 Equations de propagation des potentiels

En jauge de Lorenz, les Eqs. (8.4) et (8.5) deviennent :

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (8.7)$$

$$\Delta \phi(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (8.8)$$

La résolution d'un problème de rayonnement revient formellement à résoudre ces deux équations avec des termes sources (second membres) connus.

² En effet, $\mathbf{rot}[\mathbf{grad} \phi] = 0$ pour tout scalaire ϕ .

8.2 Potentiels retardés

8.2.1 Fonction de Green

Les deux équations ci-dessus sont de la forme

$$\mathbf{L} f(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) \quad (8.9)$$

où \mathbf{L} est un opérateur linéaire et S un terme source. En théorie des systèmes linéaires, on introduit la fonction de Green du problème, définie comme la solution de l'équation

$$\mathbf{L} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (8.10)$$

avec les mêmes conditions aux limites que celles du problème initial. Physiquement, la fonction de Green est une réponse impulsionnelle (c'est la réponse à un terme source ponctuel et infiniment bref). Lorsque cette réponse impulsionnelle est connue, on peut obtenir directement la solution pour un terme source quelconque par superposition linéaire. La solution générale du problème initial avec terme source s'écrit en effet

$$f(\mathbf{r}, t) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') S(\mathbf{r}', t') d^3r' dt' \quad (8.11)$$

Dans le cas des Eqs. (8.4) et (8.5), on définit la fonction de Green comme la solution de

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (8.12)$$

où le signe $-$ dans le second membre est conventionnel. En termes de condition aux limites, on privilégie la solution retardée³, qui correspond à une onde sortante centrée au point \mathbf{r}' .

La fonction de Green peut être déterminée de manière intuitive. Remarquons d'abord que du fait de l'invariance par translation dans l'espace (propagation dans le vide) et dans le temps, la fonction de Green est une fonction des variables $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ et $\tau = t - t'$, que l'on peut écrire $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = F(\mathbf{R}, \tau)$. En définissant $\tilde{F}(\mathbf{R}, \omega)$ la transformée de Fourier par rapport à la variable temporelle τ (avec la convention en $\exp(-i\omega\tau)$ définie au chapitre 1), l'Eq. (8.12) devient

$$\Delta \tilde{F}(\mathbf{R}, \omega) + k_0^2 \tilde{F}(\mathbf{R}, \omega) = -\delta(\mathbf{R}) \quad (8.13)$$

où $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$. Cette équation est l'équation de Helmholtz, qui décrit une onde monochromatique générée par une source ponctuelle placée au point \mathbf{r}' . La solution de cette équation, correspondant à la condition d'onde sortante, est

$$\tilde{F}(\mathbf{R}, \omega) = \frac{\exp(ik_0 R)}{4\pi R} \quad (8.14)$$

où $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. En reprenant la transformée de Fourier inverse par rapport à la variable ω , on obtient

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \frac{1}{4\pi R} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \quad (8.15)$$

³Il s'agit d'un choix qui, s'il peut sembler naturel, reste somme toute arbitraire. Des descriptions alternatives faisant intervenir des fonctions de Green avancées peuvent être introduites, voir par exemple J.A. Wheeler and R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **17**, 157 (1945).

Cette fonction de Green décrit une onde générée par une impulsion source infiniment brève créée à l'instant t' au point \mathbf{r}' . Le front d'onde se propage en s'écartant du point source \mathbf{r}' à la vitesse c (onde retardée).

8.2.2 Expressions des potentiels

En utilisant la fonction de Green ci-dessous, on peut écrire directement les solutions générales des Eqs. (8.4) et (8.5). Pour le potentiel vecteur, on a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') d^3r' dt' \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') d^3r' dt' \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) d^3r' \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{R} \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) d^3r' \tag{8.16}
 \end{aligned}$$

De même, pour le potentiel scalaire, on obtient

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{1}{R} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) d^3r' \tag{8.17}$$

Ces deux expressions sont habituellement désignées sous le terme de potentiels retardés. En effet, elles montrent que le potentiel au point \mathbf{r} et à l'instant t résultent de l'état de la source (densité de charge ou de courant) à l'instant $t - R/c$. Il y a donc un retard entre la cause et l'effet dû à la propagation à vitesse c finie sur la distance $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Notons également que les intégrales sont étendues à tout le volume V de la source (volume dans lequel les termes sources sont non nuls).

8.2.3 Potentiel vecteur en régime monochromatique

En régime monochromatique, la densité de courant et le potentiel vecteur sont de la forme $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) = \text{Re}[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \exp(-i\omega t)]$ et $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{A}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]$. De l'Eq. (8.16), on déduit l'expression de l'amplitude complexe $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{\exp(ik_0 R)}{R} d^3r' \tag{8.18}$$

Cette expression est celle du potentiel vecteur retardé en régime monochromatique. Elle donne une image physique claire du mécanisme de rayonnement. Chaque point \mathbf{r}' de la source rayonne une onde sphérique sortante d'amplitude proportionnelle à $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$. La superposition de toutes ces ondes sphériques, qui interfèrent entre elles, construit le potentiel vecteur. Le rôle des interférences entre les champs rayonnés par les différents points de la source est à souligner, et est fondamental pour la compréhension des caractéristiques des antennes (voir chapitre 9).

Il est intéressant de noter que lorsque le point d'observation \mathbf{r} est situé *hors du volume de la source*, la connaissance du potentiel vecteur \mathbf{A} suffit à caractériser tout le champ électromagnétique. En effet, on a

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} \quad (8.19)$$

et en utilisant l'équation de Maxwell $\text{rot}\mathbf{B} = -i\omega\epsilon_0\mu_0\mathbf{E}$ (compte-tenu du fait que $\mathbf{j} = 0$ hors de la source), on a aussi

$$\mathbf{E} = \frac{i}{\omega\epsilon_0\mu_0}\text{rot}\text{rot}\mathbf{A} \quad (8.20)$$

Il n'y aura donc plus lieu dans la suite de ce cours d'utiliser le potentiel scalaire ϕ .

8.3 Approximation de champ lointain

8.3.1 Potentiel vecteur

Lorsque le point d'observation est à grande distance de la source, l'expression du potentiel vecteur peut se simplifier. Notons L la taille caractéristique de la source, et prenons l'origine des coordonnées à l'intérieur du volume source. Le point \mathbf{r}' varie donc sur une échelle de l'ordre de L . Dans l'hypothèse $r \gg L$, on peut effectuer un développement limité au premier ordre de R par rapport à r'/r . En notant $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$ le vecteur unitaire qui définit la direction d'observation, on a

$$\begin{aligned} R &= (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{1/2} \\ &= r \left(1 - 2\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}'}{r} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{1/2} \\ &\simeq r - \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}' \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{R} \simeq \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}.$$

À l'ordre le plus bas, l'onde sphérique intervenant dans l'intégrale de l'Eq. (8.18) devient

$$\frac{\exp(ik_0R)}{R} \simeq \frac{\exp(ik_0r)}{r} \exp(-ik_0\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}'). \quad (8.21)$$

Pour que ce développement soit valable, il faut que $r \gg L$. Il faut également que les termes du second ordre soient négligeables dans le terme de phase ce qui signifie que $k_0r'^2/r \ll 2\pi$, ou encore $r \gg r'^2/\lambda$. On retiendra que les conditions de champ lointain sont :

$$r \gg L, \quad r \gg \frac{L^2}{\lambda}. \quad (8.22)$$

En champ lointain, l'expression du potentiel vecteur (8.18) se simplifie donc pour donner

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\exp(ik_0r)}{r} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \exp(-ik_0\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}') d^3r'. \quad (8.23)$$

On voit sur cette expression deux caractéristiques importantes du rayonnement en champ lointain :

- Le potentiel vecteur rayonné a la forme d'une onde sphérique dont l'amplitude est modulée par un terme d'interférence qui prend en compte les déphasages entre les différents points de la source.
- Mathématiquement, l'intégrale est la transformée de Fourier spatiale 3D de la densité de courant \mathbf{j} . Cette relation décrit le lien entre la distribution angulaire du champ rayonné (dépendance par rapport à \mathbf{u}) et la distribution spatiale du courant dans la source. Nous reviendrons sur les implications de cette relation au chapitre 9.

8.3.2 Champ magnétique

A partir de l'expression exacte de \mathbf{A} , on peut exprimer $\mathbf{rot}\mathbf{A}$ puis effectuer l'approximation de champ lointain :

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{rot}_{\mathbf{r}} \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{\exp(ik_0R)}{R} \right] d^3r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{grad}_{\mathbf{r}} \left[\frac{\exp(ik_0R)}{R} \right] \wedge \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(ik_0 - \frac{1}{R} \right) \frac{\exp(ik_0R)}{R} \mathbf{grad}_{\mathbf{r}} R \wedge \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3r' .\end{aligned}$$

En champ lointain, on se limite aux termes d'ordre le plus bas en r'/r . De plus $\mathbf{grad}_{\mathbf{r}} R = \mathbf{R}/R \simeq \mathbf{u}$. Au final, on obtient

$$\mathbf{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} ik_0 \mathbf{u} \wedge \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{\exp(ik_0r)}{r} \exp(-ik_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}') d^3r' . \quad (8.24)$$

On reconnaît dans cette expression l'intégrale qui donne le potentiel vecteur en champ lointain. L'expression de l'amplitude complexe du champ magnétique $\mathbf{B} = \mathbf{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})$ est donc

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = ik_0 \mathbf{u} \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r}) . \quad (8.25)$$

Cette relation est la même que celle que l'on aurait pour une onde plane. En champ lointain, le champ a *localement* une structure d'onde plane (le vecteur d'onde associé $\mathbf{k} = k_0 \mathbf{u}$ dépend de la direction \mathbf{u} et donc du point d'observation).

8.3.3 Champ électrique

Le champ électrique dans le vide est relié au potentiel vecteur par l'Eq. (8.20). Nous venons de voir qu'en champ lointain $\mathbf{rot}\mathbf{A} \simeq ik_0 \mathbf{u} \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r})$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\mathbf{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &\simeq ik_0 \mathbf{u} \wedge [ik_0 \mathbf{u} \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r})] \\ &= -k_0^2 \mathbf{u} \wedge [\mathbf{u} \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r})] \\ &= k_0^2 [\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}] .\end{aligned}$$

Le terme $\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$ est en fait la composante de \mathbf{A} projetée dans le plan transverse au vecteur \mathbf{u} , que l'on notera \mathbf{A}_\perp . Finalement, l'expression du champ électrique en champ lointain est simplement

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}). \quad (8.26)$$

Remarque : en régime temporel, cette expression deviendrait $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial\mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}, t)/\partial t$. Si l'on compare avec l'expression (8.3), on conclut qu'en champ lointain le terme $-\mathbf{grad}\phi(\mathbf{r}, t)$ compense exactement la partie longitudinale (colinéaire à \mathbf{u}) de $-\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)/\partial t$.

8.3.4 Puissance rayonnée

Dans de nombreuses situations on a besoin de déterminer la puissance rayonnée en champ lointain par une source quelconque. On introduit pour cela la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{2}\text{Re}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2\mu_0}\text{Re}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}^*). \quad (8.27)$$

En champ lointain, on obtient en utilisant (8.25) et (8.26)

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\omega^2}{2\mu_0 c}|\mathbf{A}_\perp|^2 \mathbf{u} = \frac{\epsilon_0 c}{2}|\mathbf{E}|^2 \mathbf{u}. \quad (8.28)$$

La puissance rayonnée dans une direction \mathbf{u} donnée, dans l'angle solide élémentaire $d\Omega$ (voir figure 8.1) s'écrit

$$dP = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{u} dS = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{u} r^2 d\Omega. \quad (8.29)$$

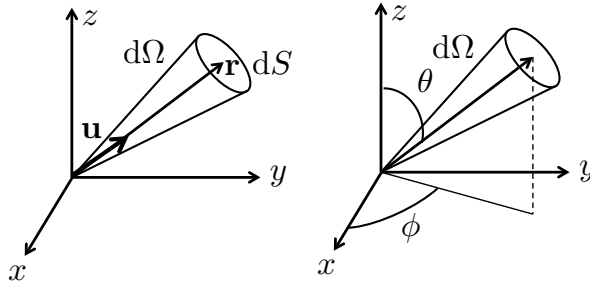


Figure 8.1: Gauche : définition de l'angle solide élémentaire $d\Omega$. La surface dS est perpendiculaire au vecteur \mathbf{r} définissant le point d'observation dans la direction $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$. Par définition, $d\Omega = dS/r^2$. L'angle solide généralise la notion d'angle en trois dimensions. Droite : en coordonnées sphériques, le point d'observation est repéré par r , θ et ϕ . On a $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$.

En effet, le flux partant dans le cône élémentaire définissant $d\Omega$ est le flux traversant la surface dS qui sous-tend l'angle solide $d\Omega$. La puissance rayonnée dans une direction \mathbf{u} , par unité d'angle solide, est donc

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\epsilon_0 c}{2}|\mathbf{E}|^2 r^2. \quad (8.30)$$

La puissance totale rayonnée dans tout l'espace s'obtient par intégration angulaire :

$$P_{ray} = \int_{4\pi} \frac{dP}{d\Omega} d\Omega. \quad (8.31)$$

Nous allons utiliser ces expressions dans le cas particulier du rayonnement dipolaire électrique dans la section suivante.

8.4 Approximation dipolaire électrique

Dans le cas d'une source de petite taille, qui vérifie $L \ll \lambda$, avec λ la longueur d'onde d'émission, le calcul du champ électromagnétique rayonné lorsque $r \gg L$ se simplifie encore. Le champ rayonné devient équivalent au champ créé par un dipole électrique unique. On parle alors d'approximation dipolaire électrique.

8.4.1 Potentiel et champ dipolaire électrique

On suppose que $L \ll \lambda$ (source de petite taille) et que $r \gg L$ (observation en champ lointain). Dans ces conditions, on peut effectuer l'approximation $\exp(-ik_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}') \simeq 1$ dans l'Eq. (8.23), ce qui revient à négliger les déphasages entre les différents points de la source ⁴. On obtient alors

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\exp(ik_0 r)}{r} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (8.32)$$

L'intégrale de la densité de courant sur le volume de la source est en fait la dérivée par rapport au temps du moment dipolaire de la source. En effet, en raisonnant sur les charges microscopiques q_i formant la source, on a

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) d^3 r &= \int_V \sum_i q_i \mathbf{v}_i(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] d^3 r \\ &= \sum_{i \in V} q_i \mathbf{v}_i(t) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i \in V} q_i \mathbf{r}_i(t) \\ &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \end{aligned}$$

car par définition $\mathbf{p} = \sum_{i \in V} q_i \mathbf{r}_i$ est le moment dipolaire électrique de la distribution de charge formant la source ⁵. On obtient donc l'expression du potentiel vecteur en approximation dipolaire

⁴En développant aux ordres suivants, on ferait apparaître les termes multipolaires : dipole magnétique, quadripole électrique, etc.

⁵Pour se convaincre que cette définition correspond bien à l'image habituelle du dipole, on peut écrire $\mathbf{p} = \sum_{q_i > 0} q_i \mathbf{r}_i - \sum_{q_i < 0} |q_i| \mathbf{r}_i$. En introduisant les barycentres des charges positives et négatives, notés \mathbf{r}^+ et \mathbf{r}^- , on a $\mathbf{p} = (\sum_{q_i > 0} q_i) \mathbf{r}^+ - (\sum_{q_i < 0} |q_i|) \mathbf{r}^- = Q^+ \mathbf{r}^+ - Q^- \mathbf{r}^-$. En particulier, si la charge totale est nulle, $Q^+ = Q^- \equiv Q$ et $\mathbf{p} = Q(\mathbf{r}^+ - \mathbf{r}^-)$. On retrouve l'image du dipole telle qu'elle est introduite, en général, en électrostatique.

électrique, pour une source placée à l'origine des coordonnées :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\exp(ik_0 r)}{r} (-i\omega \mathbf{p}). \quad (8.33)$$

Cette expression est valable sous les deux conditions $L \ll \lambda$ et $r \gg L$.

Le champ électrique dipolaire, en champ lointain, s'obtient directement en utilisant (8.26) :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\exp(ik_0 r)}{r} \mathbf{p}_\perp \quad (8.34)$$

où $\mathbf{p}_\perp = \mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$ est la projection de \mathbf{p} dans le plan transverse à \mathbf{u} (voir Fig. 8.2).

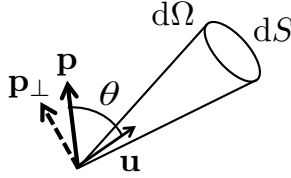


Figure 8.2: Rayonnement dipolaire dans une direction \mathbf{u} . Définition des grandeurs impliquées dans le calcul de la puissance rayonnée. On utilise la direction du dipôle \mathbf{p} pour définir l'angle θ des coordonnées sphériques.

8.4.2 Puissance rayonnée en champ lointain

La puissance rayonnée en champ lointain dans la direction \mathbf{u} , dans l'angle solide $d\Omega$, s'obtient à partir de (8.30) et (8.34) :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 \omega^4}{32\pi^2 c} |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta$$

où on a utilisé $|\mathbf{p}_\perp| = |\mathbf{p}| \sin \theta$, avec θ l'angle défini sur la figure 8.2. On peut souligner quelques caractéristiques du rayonnement dipolaire électrique :

- La dépendance angulaire en $\sin^2 \theta$ est relativement douce (le rayonnement d'un dipole électrique n'est pas très directif).
- La puissance rayonnée est nulle en $\theta = 0$, c'est-à-dire dans la direction de l'axe du dipole.
- La puissance rayonnée dépend de la fréquence, avec une dépendance en ω^4 .

La puissance totale rayonnée s'obtient en intégrant sur les directions :

$$P_{ray} = \int_{4\pi} \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{\mu_0 \omega^4}{32\pi^2 c} |\mathbf{p}|^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \quad (8.35)$$

ce qui donne au final

$$P_{ray} = \frac{\mu_0 \omega^4}{12\pi c} |\mathbf{p}|^2. \quad (8.36)$$

Références

- [1] J.D. Jackson, *Electrodynamique Classique* (Dunod, Paris, 2001).
- [2] J. Schwinger, L.L. DeRaad, Jr., K.A. Milton and W. Tsai, *Classical Electrodynamics* (Perseus Books, USA, 1998).

Chapitre 9

Antennes

Objectifs

- Introduire les concepts utiles à la description des caractéristiques des antennes (directivité, gain, surface effective).
- Faire le lien entre ces concepts pratiques et les comportements physiques issus des lois du rayonnement électromagnétique.

Une antenne est un dispositif permettant de convertir un courant électrique circulant dans un conducteur en un rayonnement électromagnétique se propageant en espace libre, et *vice versa*. Une antenne peut fonctionner en émission et en réception. Nous verrons que les propriétés de réception des antennes peuvent être déduites des propriétés d'émission, et réciproquement.

9.1 Analyse qualitative du rayonnement en champ lointain

L'expression de l'amplitude complexe du potentiel vecteur en champ lointain, et en régime monochromatique, a été établie au chapitre 8 (Eq. 8.23) :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\exp(ik_0 r)}{r} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \exp(-ik_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}') d^3 r'. \quad (9.1)$$

Dans cette expression $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$ et $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$ est le vecteur unitaire dans la direction d'observation. L'intégrale a la forme mathématique d'une transformée de Fourier 3D de la distribution de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ (on associe à la variable spatiale \mathbf{r}' un vecteur d'onde $\mathbf{k} = k_0 \mathbf{u}$). De cette observation, on peut déduire quelques propriétés générales concernant la distribution angulaire du rayonnement.

Supposons que la source émette un lobe autour d'une direction d'émission maximum définie par le vecteur d'onde \mathbf{k}_{max} . Si l'antenne a une taille caractéristique L dans une direction que nous choisissons comme l'axe Oz (voir Fig. 9.1), la densité de courant a une extension de l'ordre de L dans la direction Oz . Sa transformée de Fourier prend alors des valeurs non nulles uniquement pour une plage de vecteurs d'ondes selon Oz de l'ordre de $2\pi/L$ (propriété de transformée

de Fourier). Plus précisément, en notant k_z la composante selon Oz du vecteur d'onde, on a $0 \leq k_z \leq k_z^{max}$ avec $k_z^{max} \simeq 2\pi/L$. Ceci signifie que dans le plan de la figure, le rayonnement émis est concentré dans un lobe d'émission principal de demi-angle θ_{max} tel que $k_z^{max} = k_0 \sin \theta_{max}$. On en déduit $\sin \theta_{max} \simeq \lambda/L$.

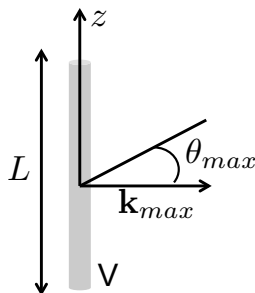


Figure 9.1: Lobe principal d'émission d'une antenne de taille caractéristique L .

On retiendra donc qu'une antenne dans laquelle le courant a une extension L émet un rayonnement caractérisé par un lobe principal d'ouverture angulaire

$$\sin \theta_{max} \simeq \lambda/L. \quad (9.2)$$

Plus la source est étendue, plus le rayonnement est directionnel.

Ce résultat décrit en fait le phénomène de diffraction du rayonnement émis par une source de taille finie. Il met en évidence le lien intime entre rayonnement, interférences et diffraction. En effet, la directivité du rayonnement résulte des interférences entre les champs émis par les différents points de la source. Pour une source de petite taille (par rapport à λ), les points de la source émettent toujours en phase, quelle que soit la direction d'observation. Le rayonnement émis est alors quasi-isotrope (cas d'une antenne dipolaire). Lorsque la taille de la source augmente, la direction principale d'émission est celle pour laquelle les interférences sont constructives. Lorsque l'on s'écarte de cette direction, une différence de marche apparaît entre les champs émis par les différents points de la source, et ce d'autant plus que les points sont distants (et donc que la source est étendue). Les interférences deviennent destructives, et le champ rayonné s'annule. Le rayonnement est donc concentré angulairement dans un "cône" autour de la direction principale d'émission, qui est d'autant plus étroit que la source est étendue. C'est l'origine physique du phénomène de diffraction.

9.2 Caractérisation des antennes

9.2.1 Directivité et gain

La distribution angulaire du rayonnement en champ lointain est caractérisée par la puissance par unité d'angle solide émise dans la direction (θ, ϕ) , que nous avons notée $dP/d\Omega$ au chapitre 8. Les angles θ et ϕ qui repèrent la direction d'observation sont définis sur la Fig. 9.2.

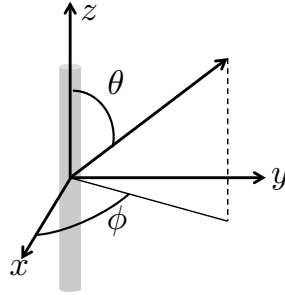


Figure 9.2: Angles θ et ϕ définissant la direction d'observation en champ lointain.

La puissance totale émise dans tout l'espace est

$$P_e = \int_{4\pi} \frac{dP}{d\Omega}(\theta, \phi) d\Omega \quad (9.3)$$

où l'on rappelle que l'angle solide élémentaire est $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ et qu'intégrer sur 4π stéradians revient à intégrer par rapport à θ sur $[0, \pi]$ et par rapport à ϕ sur $[0, 2\pi]$.

La directivité $D(\theta, \phi)$ est définie comme le rapport de la puissance directionnelle émise par unité d'angle solide et de la puissance moyenne émise par unité d'angle solide :

$$D(\theta, \phi) = \frac{dP/d\Omega(\theta, \phi)}{P_e/4\pi} = \frac{4\pi}{P_e} \frac{dP}{d\Omega}(\theta, \phi). \quad (9.4)$$

En pratique, on préfère utiliser le gain $G(\theta, \phi)$, qui repose sur une définition similaire mais en remplaçant $P_e/4\pi$ (difficilement mesurable) par la puissance émise par unité d'angle solide par une antenne isotrope, sans pertes, adaptée en impédance, et alimentée avec la même puissance P_g que l'antenne réelle. On a donc

$$G(\theta, \phi) = \frac{dP/d\Omega(\theta, \phi)}{P_g/4\pi} = \frac{4\pi}{P_g} \frac{dP}{d\Omega}(\theta, \phi). \quad (9.5)$$

Si l'on note $(dP/d\Omega)_{max}$ la puissance émise dans la direction du maximum de rayonnement, on introduit également

$$G_{max} = \frac{4\pi}{P_g} \left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{max} \quad (9.6)$$

qui est une mesure du gain global de l'antenne. Si le rayonnement est piqué angulairement, on peut estimer l'angle solide d'émission par $\Delta\Omega \simeq 4\pi/G_{max}$.

9.2.2 Rendement

Le rapport

$$\eta = \frac{G(\theta, \phi)}{D(\theta, \phi)} = \frac{P_e}{P_g} \quad (9.7)$$

est le rendement de l'antenne. Il vérifie $\eta \leq 1$. Un rendement inférieur à un peut provenir d'un désaccord d'impédance entre la ligne d'alimentation et l'antenne (la puissance réellement transmise à l'antenne est alors inférieure à la puissance P_g fournie par le générateur), et/ou à des pertes d'énergie par dissipation dans l'antenne.

9.2.3 Surface effective

Définition

Lorsqu'une antenne est utilisée en réception, on cherche à caractériser son aptitude à collecter un rayonnement incident provenant d'une direction (θ, ϕ) donnée. Pour une intensité incidente $I_{inc}(\theta, \phi)$ directionnelle (flux incident par unité de surface, unité W.m^{-2}), et ayant une *polarisation adaptée* à celle de l'antenne ¹, on définit la surface effective $A_e(\theta, \phi)$ en écrivant la puissance P_{rec} reçue par l'antenne sous la forme

$$P_{rec} = A_e(\theta, \phi) I_{inc}(\theta, \phi). \quad (9.8)$$

Notons que l'intensité incidente est reliée à la puissance incidente par unité d'angle solide par la relation

$$I_{inc}(\theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{dP_{inc}}{d\Omega}(\theta, \phi) \quad (9.9)$$

où r est la distance entre la source du rayonnement incident et le point d'observation (voir chapitre 8 section 8.3.4).

Relation fondamentale

Afin d'établir une relation importante concernant la surface effective, considérons une antenne placée dans un environnement à l'équilibre thermodynamique à la température T . Le champ de rayonnement dans cette situation est alors le rayonnement d'équilibre (ou rayonnement de corps noir), caractérisé par la luminance de Planck (unité $\text{W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}.\text{Hz}^{-1}$) :

$$L_\omega^0(T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3c^2} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \quad (9.10)$$

où $\hbar = h/2\pi$ avec h la constante de Planck, et k_B est la constante de Boltzmann. A basse fréquence $\hbar\omega \ll k_B T$, on a

$$L_\omega^0(T) \simeq \frac{\omega^2 k_B T}{4\pi^3 c^2}. \quad (9.11)$$

La puissance totale reçue par l'antenne dans la bande de fréquence $[\omega, \omega + d\omega]$ est alors, en tenant compte du fait que le rayonnement d'équilibre est non polarisé (l'intensité adaptée en polarisation est alors la moitié de l'intensité incidente) ² et isotrope :

$$P_{rec} = \int_{4\pi} A_e(\theta, \phi) \frac{L_\omega^0(T)}{2} d\omega d\Omega = \frac{\omega^2 k_B T}{8\pi^3 c^2} d\omega \int_{4\pi} A_e(\theta, \phi) d\Omega. \quad (9.12)$$

¹Par exemple, dans le cas d'une antenne orientée le long de la direction Oz , comme sur la Fig. 9.1, la direction de polarisation adaptée est celle de l'axe Oz .

²Un rayonnement non polarisé peut être vu comme la superposition de deux champs électromagnétiques polarisés linéairement et indépendants. L'intensité est alors la somme des intensités associées à chaque polarisation.

De plus, l'antenne étant elle-même à l'équilibre thermodynamique, la puissance mesurée doit correspondre au bruit thermique, dont la densité spectrale de puissance P_ω est donnée par le théorème de Nyquist³ :

$$P_{rec} = P_\omega d\omega = k_B T d\omega / (2\pi). \quad (9.13)$$

En identifiant ces deux expressions, on obtient

$$\int_{4\pi} A_e(\theta, \phi) d\Omega = \lambda^2. \quad (9.14)$$

Cette relation fondamentale est toujours valable, indépendamment du rayonnement incident. Pour une antenne isotrope (surface effective indépendante de la direction), on a $A_e = \lambda^2 / (4\pi)$.

9.3 Réciprocité et conséquences

9.3.1 Théorème de réciprocité

En référence à la Fig. 9.3 (gauche), considérons un volume source V_1 avec une densité de courant \mathbf{j}_1 , placé dans un milieu éventuellement structuré. On note \mathbf{E}_1 et \mathbf{H}_1 les champs électrique et magnétique rayonnés par cette source (on suppose un régime monochromatique à la fréquence ω). Dans une seconde situation, représentée sur la Fig. 9.3 (droite), le même milieu est excité par une autre source de volume V_2 et de densité de courant \mathbf{j}_2 . On note \mathbf{E}_2 et \mathbf{H}_2 les champs électrique et magnétique rayonnés dans cette seconde situation. Nous allons voir que les champs dans les situations 1 et 2 sont liés, la relation obtenue formant le théorème de réciprocité.

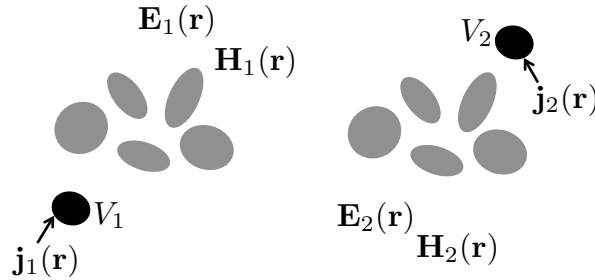


Figure 9.3: Représentation schématique des deux situations considérées dans le théorème de réciprocité. Les objets en grisés représentent un milieu structuré (obstacles, parois réfléchissantes, absorbeurs, etc).

Les champs dans les deux situations satisfont aux équations de Maxwell

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_j = i\omega \mathbf{B}_j \quad \nabla \wedge \mathbf{H}_j = \mathbf{j}_j - i\omega \mathbf{D}_j \quad (9.15)$$

³En utilisant la fréquence $\nu = \omega / (2\pi)$, la densité spectrale de puissance, définie comme la puissance par unité de fréquence dans la bande spectrale $[\nu, \nu + d\nu]$, est $P_\nu d\nu = k_B T d\nu$ pour le bruit thermique. Ce résultat, que nous admettons ici, exprime la forme classique du théorème fluctuation-dissipation, connue sous le nom de théorème de Nyquist.

avec $j = 1, 2$. On a également les relations constitutives $\mathbf{D}_j = \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon}_r \mathbf{E}_j$ et $\mathbf{B}_j = \mu_0 \boldsymbol{\mu}_r \mathbf{H}_j$. Notons que dans le cas général, les paramètres $\boldsymbol{\epsilon}_r$ et $\boldsymbol{\mu}_r$ décrivant les matériaux sont des tenseurs (les matériaux sont éventuellement anisotropes). On suppose ici que ces tenseurs sont symétriques, ce qui est une condition nécessaire à la validité du théorème de réciprocité.⁴

Des deux équations de Maxwell ci-dessus, on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}_2 \cdot \nabla \wedge \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \nabla \wedge \mathbf{H}_2 + \mathbf{E}_2 \cdot \nabla \wedge \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_1 \cdot \nabla \wedge \mathbf{E}_2 = \\ & i\omega(\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{B}_2) - i\omega(\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_2) + \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{E}_1. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Le membre de gauche peut se mettre sous la forme $\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{H}_1)$. Le membre de droite peut se simplifier car chacun des deux premiers termes s'annule lorsque $\boldsymbol{\epsilon}$ et $\boldsymbol{\mu}$ sont symétriques⁵. On obtient alors :

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{H}_1) = \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{E}_1. \quad (9.17)$$

Cette équation peut être intégrée sur un volume V défini par une surface fermée S entourant tout le milieu et les sources. Le membre de gauche se transforme en une intégrale de surface, conduisant à

$$\begin{aligned} & \int_S [\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{H}_1(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{n} \, d^2r = \\ & \int_V [\mathbf{j}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) - \mathbf{j}_2(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r})] \, d^3r \end{aligned} \quad (9.18)$$

avec \mathbf{n} la normale sortante sur la surface S . Cette relation porte le nom de relation de réciprocité de Lorentz.

En géométrie ouverte, on peut choisir pour S dans l'Eq. (9.18) une sphère de rayon $R \rightarrow \infty$. En champ lointain, les champs électrique et magnétique prennent la forme d'ondes sphériques sortantes, et ont des amplitudes complexes de la forme

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r}) \simeq \tilde{\mathbf{E}}_j(\mathbf{u}) \frac{\exp(ik_0 r)}{r} \quad (9.19)$$

$$\mathbf{H}_j(\mathbf{r}) \simeq \tilde{\mathbf{H}}_j(\mathbf{u}) \frac{\exp(ik_0 r)}{r} \quad (9.20)$$

avec $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$ le vecteur unitaire définissant la direction d'observation. L'équation de Maxwell $\mathbf{rot} \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_j(\mathbf{r})$ impose que les amplitudes soient reliées par $\omega\mu_0 \tilde{\mathbf{H}}_j(\mathbf{u}) = k_0 \mathbf{u} \wedge \tilde{\mathbf{E}}_j(\mathbf{u})$, de telle sorte que le terme $(\mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{H}_1)$ s'annule en champ lointain (et donc sur la surface S). On obtient donc finalement

$$\int_{V_1} \mathbf{j}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \, d^3r = \int_{V_2} \mathbf{j}_2(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \, d^3r \quad (9.21)$$

⁴Des tenseurs de permittivité et de perméabilité non symétriques sont observés, par exemple, en présence d'un champ magnétique statique, ou dans le cas de milieux optiquement actifs formés de structures microscopiques chirales.

⁵On rappelle que si \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont des vecteurs, et \mathbf{T} est un tenseur d'ordre deux, alors $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{T} \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{v}_1$, où \mathbf{T}^T désigne le tenseur transposé. Un tenseur est symétrique lorsque $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}$.

les intégrales étant étendues aux volumes des deux sources. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de réciprocité. Il montre que les champs rayonnés dans les situations 1 et 2 de la Fig. 9.3 ne sont pas indépendants.

Dans le cas de sources dipolaires électriques placées aux points \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 , et de moments dipolaires \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 , on a $\mathbf{j}_1(\mathbf{r}) = -i\omega\mathbf{p}_1\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ et $\mathbf{j}_2(\mathbf{r}) = -i\omega\mathbf{p}_2\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)$. On obtient alors une forme simplifiée du théorème de réciprocité :

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{r}_1) = \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2). \quad (9.22)$$

Afin d'interpréter le résultat, considérons le cas particulier où les deux sources sont de même amplitude ($|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$). Le théorème de réciprocité montre alors qu'en interchangeant source et point d'observation (comme dans les deux situations représentées sur la Fig. 9.4), la composante du champ projetée sur la direction de la source est conservée. Pour des ondes scalaires (comme en acoustique dans un fluide), il n'y aurait pas de projection et on aurait plus simplement $E_2(\mathbf{r}_1) = E_1(\mathbf{r}_2)$.

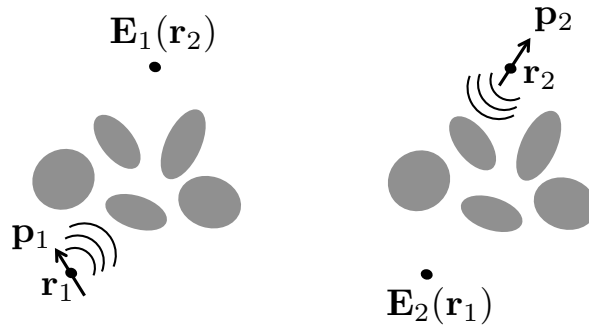


Figure 9.4: Illustration du théorème de réciprocité avec des sources dipolaires.

9.3.2 Relation entre gain et surface effective

Le théorème de réciprocité permet d'établir une relation utile entre le gain et la surface effective d'une antenne. Considérons pour cela la situation de la Fig. 9.5, avec deux antennes séparées d'une distance r suffisamment grande pour que les antennes soient en champ lointain l'une de l'autre.

Pour simplifier, nous n'établissons la relation que pour des antennes dipolaires, de directions définies par les vecteurs unitaires \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 . On suppose de plus que les deux antennes sont identiques. Notons \mathbf{E}_1 le champ électrique rayonné lorsque l'antenne 1 est excitée avec un moment dipolaire unité $\mathbf{p}_1 = \mathbf{u}_1$. La puissance reçue par l'antenne 2 est alors $P_2 = A|\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{E}_1|^2$, où A est une constante qu'on ne précise pas (cette constante fait intervenir notamment la polarisabilité de l'antenne). Notons que cette expression de la puissance prend en compte le fait que l'antenne 2 détecte la composante de polarisation projetée le long de la direction \mathbf{u}_2 (polarisation adaptée). De même, lorsque l'antenne 2 est excitée avec un moment dipolaire unité orienté le long de \mathbf{u}_2 , le champ rayonné est \mathbf{E}_2 et la puissance reçue par l'antenne 1 s'écrit

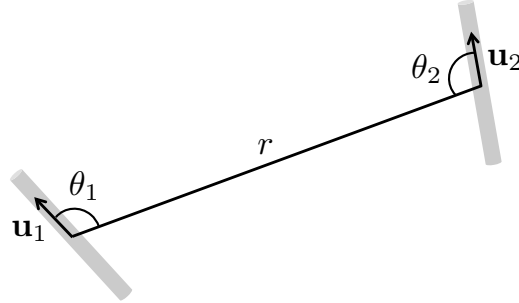


Figure 9.5: Géométrie utilisée pour établir la relation entre gain et surface effective.

$P_1 = A|\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{E}_2|^2$. D'après le théorème de réciprocité Eq. (9.22), on a $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{E}_1$ et donc $P_1 = P_2$.

On peut exprimer les puissances P_1 et P_2 en fonction des gains et surfaces effectives de chacune des antennes, que nous noterons $G_{1,2}(\theta, \phi)$ et $A_{1,2}(\theta, \phi)$. En utilisant les définitions de chacune des grandeurs, on a

$$P_2 = A_2(\theta_2, \phi_2) I_1(\theta_1, \phi_1) = A_2(\theta_2, \phi_2) \frac{1}{r^2} \frac{dP_1}{d\Omega}(\theta_1, \phi_1) = A_2(\theta_2, \phi_2) G_1(\theta_1, \phi_1) \frac{P_g}{4\pi r^2}. \quad (9.23)$$

De même, la puissance P_1 s'exprime comme

$$P_1 = A_1(\theta_1, \phi_1) G_2(\theta_2, \phi_2) \frac{P_g}{4\pi r^2} \quad (9.24)$$

en supposant que les deux antennes sont alimentées avec la même puissance P_g . De l'égalité $P_1 = P_2$, on déduit

$$\frac{G_1(\theta_1, \phi_1)}{A_1(\theta_1, \phi_1)} = \frac{G_2(\theta_2, \phi_2)}{A_2(\theta_2, \phi_2)}. \quad (9.25)$$

Bien qu'établie ici dans un cadre simplifié, cette relation est tout à fait générale. Elle est valable pour tout type d'antennes, dans les conditions d'application du théorème de réciprocité.

Examinons le cas particulier où l'antenne 1 est une antenne quelconque, et l'antenne 2 est une antenne isotrope de rendement unité. On a dans ce cas $G_2(\theta, \phi) = 1$ et $A_2(\theta, \phi) = \lambda^2/(4\pi)$, et donc $G_1(\theta_1, \phi_1) = (4\pi/\lambda^2) A_1(\theta_1, \phi_1)$.

On retiendra donc que pour une antenne quelconque de gain $G(\theta, \phi)$ et de surface effective $A_e(\theta, \phi)$, on a

$$G(\theta, \phi) = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_e(\theta, \phi). \quad (9.26)$$

Cette relation entre gain et surface effective est une conséquence directe du théorème de réciprocité. Elle permet de déterminer la surface effective à partir d'une mesure de gain.

9.3.3 Formule de Friis

La formule de Friis permet de calculer la puissance transférée entre une antenne émettrice et une antenne réceptrice en fonction des gains des deux antennes.

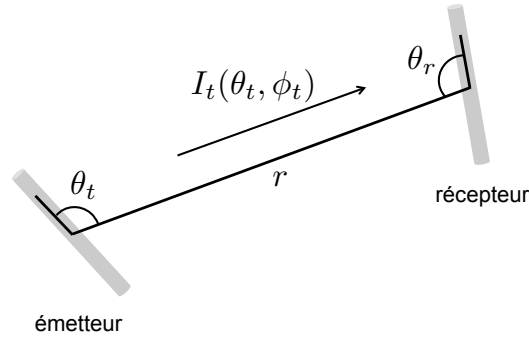


Figure 9.6: Transmission de puissance entre une antenne émettrice et une antenne réceptrice. On indice par t les grandeurs relatives à l'antenne émettrice, et par r celles relatives à l'antenne réceptrice.

En référence à la géométrie de la Fig. 9.6, l'intensité émise par l'antenne émettrice dans la direction (θ_t, ϕ_t) s'écrit

$$I_t(\theta_t, \phi_t) = G_t(\theta_t, \phi_t) \frac{P_t}{4\pi r^2}. \quad (9.27)$$

La puissance reçue par l'antenne réceptrice s'exprime sous la forme

$$P_r = A_r(\theta_r, \phi_r) I_t(\theta_t, \phi_t) = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r(\theta_r, \phi_r) I_t(\theta_t, \phi_t). \quad (9.28)$$

Des deux relations ci-dessus, on obtient directement

$$P_r = \frac{\lambda^2}{(4\pi r)^2} P_t G_t(\theta_t, \phi_t) G_r(\theta_r, \phi_r). \quad (9.29)$$

Cette relation, connue sous le nom de formule de Friis, est très utile en pratique pour calculer la puissance transférée à une longueur d'onde λ entre deux antennes séparées d'une distance r . Elle permet également de déterminer le gain d'une antenne en utilisant une autre antenne dont les caractéristiques sont connues.

9.4 Réseaux d'antennes

Un réseau d'antennes est un ensemble d'antennes arrangées périodiquement dans l'espace. Cet arrangement périodique peut produire un rayonnement très directif, utile dans de nombreuses applications (en télécommunications et en télédétection par exemple).

9.4.1 Interférences et directivité

Calculons le diagramme d'émission du réseau unidimensionnel d'antennes représenté sur la Fig. 9.7. Ce réseau est formé de N antennes isotropes, séparées d'une distance d (période du réseau).

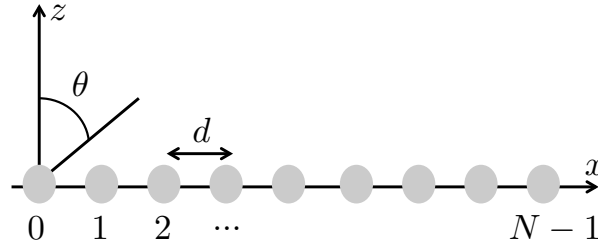


Figure 9.7: Emission par un réseau périodique d'antennes. Chaque antenne est un cylindre orienté le long de la direction Oy .

L'amplitude complexe du champ émis dans la direction θ s'écrit :

$$\mathbf{E}(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{E}_0 \exp(ink_0\delta) \quad (9.30)$$

où $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$ et $\delta = d \sin \theta$ est la différence de marche entre les champs émis par deux antennes adjacentes. On a supposé que toutes les antennes sont excitées par le même courant, de telle sorte que le déphasage est dû uniquement à la propagation des ondes émises. La suite géométrique se somme directement, et le module du champ émis s'écrit

$$|\mathbf{E}(\theta)| = |\mathbf{E}_0| \left| \frac{\sin(N\psi/2)}{\sin(\psi/2)} \right| \quad (9.31)$$

où $\psi = k_0\delta$ est le déphasage entre les champs émis par deux antennes adjacentes. On remarque que le champ est maximum dans la direction $\theta = 0$, pour laquelle les champs émis par les N antennes sont tous en phase. On a donc des interférences constructives. Le maximum du champ est $|\mathbf{E}|_{max} = N|\mathbf{E}_0|$. La directivité du réseau peut être caractérisée par le facteur de réseau, défini comme

$$F(\psi) = \frac{|\mathbf{E}(\theta)|}{|\mathbf{E}|_{max}} = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin(N\psi/2)}{\sin(\psi/2)} \right|. \quad (9.32)$$

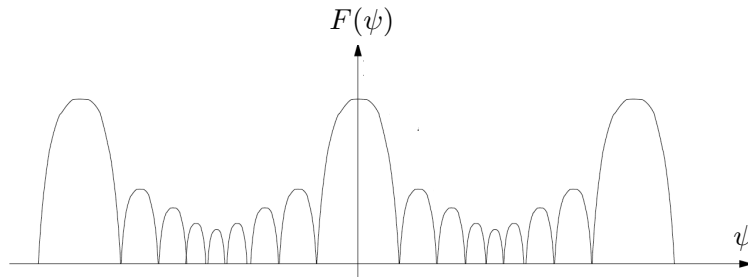


Figure 9.8: Facteur de réseau d'un réseau linéaire.

Le facteur de réseau d'un réseau linéaire comme celui de la Fig. 9.7 est tracé sur la Fig. 9.8. On observe une succession de maxima définissant les lobes d'émission, correspondant aux directions

pour lesquelles les interférences sont constructives. Ces directions sont définies par la condition $\psi = p2\pi$ où p est un nombre entier ($p = 0$ correspond au lobe principal, $p \neq 0$ correspondant aux lobes de périodicité). Ces directions principales d'émission sont séparées par des zéros d'émission, correspondant aux directions pour lesquelles les interférences sont destructives ($N\psi/2 = p\pi$ et $\psi/2 \neq p'\pi$), et des lobes secondaires (maxima locaux obtenus chaque fois que $dF/d\psi = 0$). Finalement, notons bien que dans le cas général d'une distribution angulaire tridimensionnelle (et pas restreinte au plan $Ox-Oz$ comme dans l'exemple précédent), le facteur de réseau $F(\theta, \phi)$ est une fonction des deux angles θ et ϕ .

On retiendra qu'un réseau d'antennes peut donc produire un rayonnement important dans des directions bien définies, même dans le cas où une antenne isolée produirait un rayonnement isotrope.

9.4.2 Contrôle de la directivité

Dans l'exemple précédent, on a supposé que toutes les antennes du réseau sont excitées par le même courant, et donc en phase. La directivité provient donc dans ce cas uniquement des déphasages dus à la propagation. En contrôlant les phases relatives et les amplitudes des courants excitant les différentes antennes, on peut moduler cette directivité et façonner le diagramme de rayonnement. Par exemple, en ajoutant un déphasage constant entre deux antennes successives, on peut faire pointer le lobe principal d'émission dans une direction autre que $\theta = 0$. Techniquement, ceci revient à ajouter en amont de chaque antenne des déphaseurs et des amplificateurs à gain contrôlables. On peut ainsi réaliser des antennes à balayage électronique. Du fait de la réciprocité émission/réception, ce procédé permet également de concevoir des réseaux d'antennes collectant principalement le rayonnement provenant d'une direction donnée.

Un autre degré de liberté pour le contrôle de la directivité consiste à utiliser des antennes élémentaires qui ont elles-mêmes un diagramme de rayonnement non isotrope. Dans le cas général où une antenne isolée est caractérisée par un diagramme de rayonnement

$$f_a(\theta, \phi) = \frac{|\mathbf{E}_a(\theta, \phi)|}{|\mathbf{E}|_{a,max}} \quad (9.33)$$

alors le diagramme de rayonnement du réseau est simplement donné par

$$f_r(\theta, \phi) = f_a(\theta, \phi) \times F(\theta, \phi). \quad (9.34)$$

On retiendra donc que pour calculer le diagramme de rayonnement d'un réseau de N antennes identiques et indépendantes (non couplées), il faut déterminer le facteur de réseau de N antennes isotropes, déterminer le diagramme de rayonnement d'une antenne individuelle, et de multiplier ces deux diagrammes.

Références

- [1] J.D. Jackson, *Electrodynamique Classique* (Dunod, Paris, 2001).
- [2] O. Picon *et coll.*, *Les Antennes* (Dunod, Paris, 2009).